CIRCUITOS LÓGICOS
ARITMÉTICA: SOMA E SUBTRAÇÃO

Marco A. Zanata Alves

Slides baseados nos slides de Rodrigo Hausen - CMCC – UFABC (2013)
http://compscinet.org/hausen/courses/circuitos/

CONVERSÃO DA BASE 10 PARA BASE D

Números positivos menores do que 1: $(0, a_{-1}\ a_{-2} \ldots)_{10}$ para base 2

Ex1.: $(0{,}8125)_{10}$ p/ base 2

CONVERSÃO DA BASE 10 PARA BASE D

Números positivos menores do que 1: $(0, a_{-1}\ a_{-2}\ ...)_{10}$ para base 2

Ex1.: $(0{,}8125)_{10}$ p/ base 2

Grande sacada: observe que $(0, a_{-1}\ a_{-2}\ a_{-3}\ ...)_d \times d = (a_{-1}, a_{-2}\ a_{-3}...)_d$

$(0{,}8125)_{10} * 2 = (\mathbf{1}\ {,}6250)_{10},\ \ a_{-1} = 1$

CONVERSÃO DA BASE 10 PARA BASE D

Números positivos menores do que 1: $(0, a_{-1}\ a_{-2}\ ...)_{10}$ para base 2

Ex1.: $(0{,}8125)_{10}$ p/ base 2

Grande sacada: observe que $(0, a_{-1}\ a_{-2}\ a_{-3}\ ...)_d \times d = (a_{-1}, a_{-2}\ a_{-3}...)_d$

$(0{,}8125)_{10} * 2\ =\ (\mathbf{1}\ {,}6250)_{10},\ \ a_{-1} = 1$

$(0{,}6250)_{10} * 2\ =\ (\mathbf{1}\ {,}25)_{10},\ \ a_{-2} = 1$

CONVERSÃO DA BASE 10 PARA BASE D

Números positivos menores do que 1: $(0, a_{-1}\ a_{-2} \ldots)_{10}$ para base 2

Ex1.: $(0{,}8125)_{10}$ p/ base 2

Grande sacada: observe que $(0, a_{-1}\ a_{-2}\ a_{-3} \ldots)_d \times d = (a_{-1}, a_{-2}\ a_{-3} \ldots)_d$

$(0{,}8125)_{10} * 2 = (\mathbf{1}, 6250)_{10},\ a_{-1} = 1$

$(0{,}6250)_{10} * 2 = (\mathbf{1}, 25)_{10},\ a_{-2} = 1$

$(0{,}25)_{10} * 2 = (\mathbf{0}, 50)_{10},\ a_{-3} = 0$

$(0{,}50)_{10} * 2 = (\mathbf{1}, 0)_{10},\ a_{-4} = 1$

$(0{,}0)_{10} * 2 = (\mathbf{0}, 0)_{10},\ a_{-5} = 0$

$\ldots$

$(0{,}8125)_{10} = (0{,}1101)_2$

CONVERSÃO DA BASE 10 PARA BASE D

Ex2.: $(0{,}1)_{10}$ para base 2

CONVERSÃO DA BASE 10 PARA BASE D

Ex2.: $(0{,}1)_{10}$ para base 2

$(0{,}1) = \left(0{,}0\overline{0011}\ldots\right)_2$

CUIDADO! Nem todo número fracionário que possui representação finita na base 10, também possui representação finita em outras bases.

Ex3.: $(6{,}22)_{10}$ para base 2

CONVERSÃO DA BASE 10 PARA BASE D

Ex2.: $(0{,}1)_{10}$ para base 2

$$(0{,}1) = \left(0{,}0\overline{0011}\ldots\right)_2$$

CUIDADO! Nem todo número fracionário que possui representação finita na base 10, também possui representação finita em outras bases.

Ex3.: $(6{,}22)_{10}$ para base 2

$$110{,}0\overline{0111000010100010110 1}\ldots$$

Ex3.: $(6{,}22)_{10}$ para base 16

CONVERSÃO DA BASE 10 PARA BASE D

Ex2.: $(0{,}1)_{10}$ para base 2

$$(0{,}1) = \left(0{,}0\overline{0011}\ldots\right)_2$$

CUIDADO! Nem todo número fracionário que possui representação finita na base 10, também possui representação finita em outras bases.

Ex3.: $(6{,}22)_{10}$ para base 2

$$110{,}0\overline{01110000101000101101}\ldots$$

Ex3.: $(6{,}22)_{10}$ para base 16

$$6{,}03\overline{851EB}\ldots$$

CONVERSÃO DA BASE 2 PARA BASE 16 E VICE-VERSA

Tabela de conversão entre números de um dígito em base 16 para números de 4 dígitos na base 2

Note que cada 4 dígitos na base 2 correspondem a números de exatamente 1 dígito na base 16

Ex.: $(C5{,}3E)_{16} = (\quad)_2$

Base 16	Base 2
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111

Base 16	Base 2
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

CONVERSÃO DA BASE 2 PARA BASE 16 E VICE-VERSA

Tabela de conversão entre números de um dígito em base 16 para números de 4 dígitos na base 2

Note que cada 4 dígitos na base 2 correspondem a números de exatamente 1 dígito na base 16

Ex.:

$(C5{,}3E)_{16} = (\mathbf{1100}0101{,}\,\mathbf{0011}1110)_2$

$(10010{,}1001010)_2 = (\quad)_{16}$

Base 16	Base 2
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111

Base 16	Base 2
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

CONVERSÃO DA BASE 2 PARA BASE 16 E VICE-VERSA

Tabela de conversão entre números de um dígito em base 16 para números de 4 dígitos na base 2

Note que cada 4 dígitos na base 2 correspondem a números de exatamente 1 dígito na base 16

Ex.:

$(C5{,}3E)_{16} = (\mathbf{1100}0101{,}\mathbf{0011}1110)_2$

$(\mathbf{00}010010{,}1001010\mathbf{0})_2 = (12{,}94)_{16}$

Base 16	Base 2
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111

Base 16	Base 2
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

CONVERSÃO DA BASE 2 PARA BASE 16 E VICE-VERSA

De 16 para 2: substitua cada dígito na base 16 pelos 4 dígitos correspondentes na base 2

$$(C5,3E)_{16} = (\mathbf{1100}0101,\mathbf{0011}1110)_2$$

De 2 para 16: agrupe de 4 em 4 os dígitos a partir da vírgula (da vírgula para os extremos). Considere como zeros os dígitos que estejam faltando para completar algum grupo.

$$(\mathbf{11}1110,\mathbf{1001}101)_2 = (3E,9A)_{16}$$

CONVERSÃO DA BASE 2 PARA BASE 8 E VICE-VERSA

Também é fácil converter da base 2 para a base 8 e vice-versa.

Note que todos os inteiros com até 3 algarismos na base 2 podem ser representados por apenas 1 algarismo na base 8

$(73{,}44)_8 = (?)_2$
$(\mathbf{11}001\mathbf{011}101, \mathbf{110}110\mathbf{1})_2 = (?)_8$

CONVERSÃO DA BASE 2 PARA BASE 8 E VICE-VERSA

Também é fácil converter da base 2 para a base 8 e vice-versa.

Note que todos os inteiros com até 3 algarismos na base 2 podem ser representados por apenas 1 algarismo na base 8

$(73{,}44)_8 = (111011{,}100100)_2$
$(\mathbf{11}001\mathbf{011}101, \mathbf{110}110\mathbf{1})_2 = (3135{,}664)_8$

BASES MAIS UTILIZADAS EM COMPUTAÇÃO

Por razões que já discutimos (veremos mais à frente), a base 2 é a base mais usada em computação hoje em dia.

Como é muito fácil converter da base 2 para as bases 8 e 16 e vice-versa, estas bases costumam também ser muito usadas.

Note que um número inteiro costuma ter menos dígitos quando é representado numa base maior.

$$(1111110)_2 = (126)_{10} = (7E)_{16}$$

BASES MAIS UTILIZADAS EM COMPUTAÇÃO

Nomes para as bases mais usadas:

- Base 2 = base binária
- Base 8 = base octal
- Base 10 = base decimal
- Base 16 = base hexadecimal

Além dessas, há outras bases menos usadas em computação, tais como a base 64, que não possuem nomes especiais.

ARITMÉTICA

Perguntas que responderemos hoje:

- Por que quando somamos dois números na base 10, podemos colocar "um sobre o outro" e somar os dígitos individualmente, tomando cuidado com o "vai um"?
- Qual o significado do "vai um"?
- Será que o mesmo procedimento de soma também funciona em outras bases?

SOMA BINÁRIA

ANALISANDO A SOMA

$$\begin{array}{rl} 1\,1\,1 & \leftarrow \text{“vai-uns”} \\ 3\,9\,7 & \\ 6\,5\,4 & + \\ \hline 1\,0\,5\,1 & \end{array}$$

Ex.: 397 + 654 = 1051

$$397 = 3 * 10^2 + 9 * 10^1 + 7 * 10^0$$

$$+\ 654 = 6 * 10^2 + 5 * 10^1 + 4 * 10^0$$

ANALISANDO A SOMA

Ex.: 397 + 654 = 1051

$$
\begin{array}{rl}
111 & \leftarrow \text{“vai-uns”} \\
397 & \\
654 & + \\
\hline
1051 &
\end{array}
$$

$$397 = 3 * 10^2 \quad + 9 * 10^1 \quad + 7 * 10^0$$

$$+ 654 = 6 * 10^2 \quad + 5 * 10^1 \quad + 4 * 10^0$$

$$397 + 654 = (3 + 6) * 10^2 + (9 + 5) * 10^1 + (7 + 4) * 10^0$$

ANALISANDO A SOMA

$$\begin{array}{rl} 1\,1\,1\;\; & \leftarrow \text{“vai-uns”} \\ 3\,9\,7 & \\ 6\,5\,4 & + \\ \hline 1\,0\,5\,1 & \end{array}$$

Ex.: 397 + 654 = 1051

$$397 = 3 * 10^2 \quad + 9 * 10^1 \quad + 7 * 10^0$$

$$+\,654 = 6 * 10^2 \quad + 5 * 10^1 \quad + 4 * 10^0$$

$$397 + 654 = (3 + 6) * 10^2 + (9 + 5) * 10^1 + (7 + 4) * 10^0$$

$$= (3 + 6) * 10^2 + (9 + 5) * 10^1 + \underbrace{\mathbf{1} * \mathbf{10^1}}_{\text{Vai um}} + (1) * 10^0$$

ANALISANDO A SOMA

Ex.: 397 + 654 = 1051

$$\begin{array}{rl} 111 & \leftarrow \text{“vai-uns”} \\ 397 & \\ 654 & + \\ \hline 1051 & \end{array}$$

$$397 = 3 * 10^2 \qquad + 9 * 10^1 \qquad + 7 * 10^0$$

$$+ 654 = 6 * 10^2 \qquad + 5 * 10^1 \qquad + 4 * 10^0$$

$$397 + 654 = (3 + 6) * 10^2 + (9 + 5) * 10^1 + (7 + 4) * 10^0$$

$$= (3 + 6) * 10^2 + (9 + 5) * 10^1 + \mathbf{1} * \mathbf{10^1} + (1) * 10^0$$

$$= \cdots$$

$$= 1 * 10^3 + 0 * 10^2 + 5 * 10^1 + 1 * 10^0$$

ALGORITMO DA SOMA

Entrada: números com n algarismos

$A = a_{n-1}\, a_{n-2} \dots a_1\, a_0$ e

$B = b_{n-1}\, b_{n-2} \dots b_1\, b_0$

Saída: número

$C = c_n\, c_{n-1}\, c_{n-2} \dots c_1\, c_0$

com $n + 1$ algarismos que representa a soma $A + B$.

```
VaiUm ← 0
PARA i = 0...n-1
  SE VaiUm = 0
    ci    ← Tabuada[ai][bi]
    VaiUm ← TemVaiUm[ai][bi]
  SENÃO
    ci    ← TabuadaComVaiUm[ai][bi]
    VaiUm ← VaiUmComVemUm[ai][bi]
cn   ←  VaiUm
```

ALGORITMO DA SOMA

VaiUm ← 0

PARA i = 0...n-1

  SE VaiUm = 0

    ci ← **Tabuada[$\boldsymbol{a_i}$][$\boldsymbol{b_i}$]**

    VaiUm ← TemVaiUm[a_i][b_i]

  SENÃO

    ci ← TabuadaComVaiUm[a_i][b_i]

    VaiUm ← VaiUmComVemUm[a_i][b_i]

cn ← VaiUm

Tabuada = Matriz[10][10]

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
9	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8

ALGORITMO DA SOMA

```
VaiUm ← 0
PARA i = 0...n-1
  SE VaiUm = 0
    ci    ← Tabuada[a_i][b_i]
    VaiUm ← TemVaiUm[a_i][b_i]
  SENÃO
    ci    ← TabuadaComVaiUm[a_i][b_i]
    VaiUm ← VaiUmComVemUm[a_i][b_i]
cn   ←  VaiUm
```

TabuadaComVaiUm = Matriz[10][10]

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

ALGORITMO DA SOMA

```
VaiUm ← 0
PARA i = 0...n-1
  SE VaiUm = 0
    ci    ← Tabuada[aᵢ][bᵢ]
    VaiUm ← TemVaiUm[aᵢ][bᵢ]
  SENÃO
    ci    ← TabuadaComVaiUm[aᵢ][bᵢ]
    VaiUm ← VaiUmComVemUm[aᵢ][bᵢ]
cn   ←  VaiUm
```

TemVaiUm = Matriz[10][10]

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
3	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
9	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1

ALGORITMO DA SOMA

```
VaiUm ← 0
PARA i = 0...n-1
  SE VaiUm = 0
    ci    ← Tabuada[a_i][b_i]
    VaiUm ← TemVaiUm[a_i][b_i]
  SENÃO
    ci    ← TabuadaComVaiUm[a_i][b_i]
    VaiUm ← VaiUmComVemUm[a_i][b_i]
cn   ←  VaiUm
```

$\text{VaiUmComVemUm} = \text{Matriz}[10][10]$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
2	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
3	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

ALGORITMO DA SOMA

Como somar números em outra base, p. ex., 2?

Ex.: $(101011)_2 + (100111)_2 = (1010010)_2$, ou seja,

$(43)_{10} + (39)_{10} = (82)_{10}$

ALGORITMO DA SOMA

Como somar números em outra base, por exemplo 2?

Ex.: $(101011)_2 + (100111)_2 = (1010010)_2$, ou seja,

$(43)_{10} + (39)_{10} = (82)_{10}$

$$
\begin{array}{rl}
1\ \ 1111 & \leftarrow \text{“vai-uns”} \\
101011 & \\
100111 & + \\
\hline
1010010 &
\end{array}
$$

Tabuada na base 2: bem mais simples!

Tabuada

	0	1
0	0	1
1	1	0

TemVaiUm

	0	1
0	0	0
1	0	1

TabuadaComVaiUm

	0	1
0	1	0
1	0	1

VaiUmComVemUm

	0	1
0	0	1
1	1	1

SUBTRAÇÃO BINÁRIA

SUBTRAÇÃO BINÁRIA

$A - B = C$, A é o **minuendo,** B é o **subtraendo**

Da direita para a esquerda, algarismo por algarismo

Se o algarismo do minuendo é menor que o do subtraendo, “empresta” do algarismo à esquerda

Ex.: 110001 – 10011

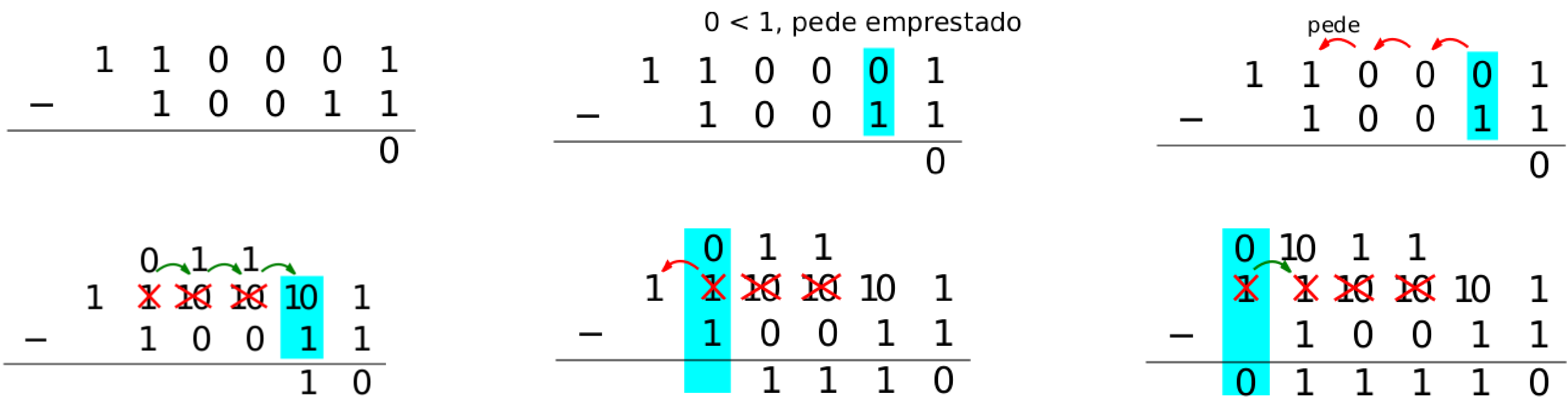
SUBTRAÇÃO BINÁRIA

A − B = C , A é o **minuendo**, B é o **subtraendo**

Da direita para a esquerda, algarismo por algarismo

Se o algarismo do minuendo é menor que o do subtraendo, “empresta” do algarismo à esquerda

Ex.: 110001 − 10011 **= 11110**



SUBTRAÇÃO BINÁRIA

Jeito fácil: usando o complemento de 2

Ex.: 110001 − 10011

Complemento de 1 de 10011 com 6 algarismos (maior quantidade de algarismos entre minuendo e subtraendo):

$$\underbrace{111111}_{\text{6 “uns”}} - 10011 = 101100$$

SUBTRAÇÃO BINÁRIA

Jeito fácil: usando complemento de 2

Ex.: 110001 − 10011

Complemento de 1 de 10011 com 6 algarismos (maior quantidade de algarismos entre minuendo e subtraendo):

$$\underbrace{111111}_{6\ \text{“uns”}} - 10011 = 101100$$

Complemento de 1 de número binário: troca 1 por 0 e vice-versa

SUBTRAÇÃO BINÁRIA

Jeito fácil: usando complemento de 2

Ex.: 110001 − 10011

Complemento de 1 de 10011 com 6 algarismos (maior quantidade de algarismos entre minuendo e subtraendo):

$$\underbrace{111111}_{6\text{ “uns”}} - 10011 = 101100$$

Complemento de 1 de número binário: troca 1 por 0 e vice-versa

Complemento de 2: é o complemento a 1, adicionado de 1 unidade:

$$111111 - 10011 + \mathbf{1} = 101100$$

SUBTRAÇÃO BINÁRIA

Para um número B qualquer, usaremos a seguinte notação.

Complementos de 1: $\overline{B}$

Complemento de 2: $\overline{B} + 1$

SUBTRAÇÃO BINÁRIA

Usando complemento de 2:

$A - B = A + (\overline{B} + 1)$, desprezando o último "vai-um"

Ex.: 110001 − 10011

SUBTRAÇÃO BINÁRIA

Usando complemento de 2:

$A - B = A + (\overline{B} + 1)$, desprezando o último "vai-um"

Ex.: 110001 − 10011

$A = 110001, \quad B \ = \ 10011$

$\overline{B} = 101100, \quad \overline{B} + 1 \ = \ 101101$

$A + (\overline{B} + 1) =$

$$\begin{array}{cccccccc l}
 & 1 & & & & & 1 & & \text{vai-uns} \\
 & & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\
+ & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \\
\hline
 & \cancel{1} & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 &
\end{array}$$

ALGORITMO DA SUBTRAÇÃO

```
ComplementoDeUm(B[0...n-1])
  B̄ ← Array[0...n-1]
  PARA i = 0...n-1 FAÇA
    SE B[i] = 0 ENTÃO B̄[i] ← 1
    SE B[i] = 1 ENTÃO B̄[i] ← 0
  RETORNE B̄
```

```
Subtração(A[0...n-1], B[0...n-1])
    B̄ ← ComplementoDeUm(B)
  Um ← Array[0...n] Um[0] ← 1
  ComplementoDeDois ← Soma(B̄, Um)
  // descarta n+1-ésimo dígito criado para a soma
  ComplementoDeDois ← ComplementoDeDois[0...n-1]
  C ← Soma(A, ComplementoDeDois)
  C ← C[0...n-1] // descarta vai-um
  RETORNE C
```

SUBTRAÇÃO BINÁRIA: NÚMEROS NEGATIVOS

E se o minuendo for menor que o subtraendo?

$$A - B < 0 \quad se \quad A < B$$

O algoritmo tradicional (usando empréstimos) não funciona! Não terá como fazer empréstimo para o algarismo mais à esquerda.

SUBTRAÇÃO BINÁRIA: NÚMEROS NEGATIVOS

E se o minuendo for menor que o subtraendo?

$$A - B < 0 \quad se \quad A < B$$

O algoritmo tradicional (usando empréstimos) não funciona! Não terá como fazer empréstimo para o algarismo mais à esquerda.

Como efetuar a subtração? Pelo jeito tradicional, é necessário trocar a ordem das parcelas e colocar o sinal de menos à esquerda do resultado.

$$10011 - 110001 = -(110001 - 10011) = -11110$$

Note o algoritmo tradicional falha se, e somente se, o minuendo for menor que o subtraendo. E se usarmos complemento a 2?

SUBTRAÇÃO BINÁRIA: NÚMEROS NEGATIVOS

Ex.: 10011 – 110001 usando complemento a 2.

SUBTRAÇÃO BINÁRIA: NÚMEROS NEGATIVOS

Ex.: 10011 − 110001 usando complemento a 2.

$A = 010011,\ B\ =\ 110001$

$\overline{B} = 001110,\ \ \overline{B} + 1\ =\ 001111$

$$A\ +\ (\overline{B} + 1)\ =\ 010011\ +\ 001111\ = \begin{array}{ccccccccl} & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \longleftarrow \text{vai-uns} \\ & & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \\ + & & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ \hline & \square & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

SUBTRAÇÃO BINÁRIA: NÚMEROS NEGATIVOS

Quando estivermos fazendo subtração com complemento a 2, se não houver o vai-um mais à esquerda – ou seja, se c_n não for 1 no algoritmo da soma – então o minuendo é menor que o subtraendo.

SUBTRAÇÃO BINÁRIA: NÚMEROS NEGATIVOS

Quando estivermos fazendo subtração com complemento a 2, se não houver o vai-um mais à esquerda – ou seja, se c_n não for um no algoritmo da soma – então o minuendo é menor que o subtraendo.

Observe que o resultado da operação, à primeira vista, não faz sentido:

$A = 010011,\ B = 110001$

$A + \left(\overline{B} + 1\right) = 010011 + 001111 = 100010 \neq A - B = -11110$

SUBTRAÇÃO BINÁRIA: NÚMEROS NEGATIVOS

Quando estivermos fazendo subtração com complemento a 2, se não houver o vai-um mais à esquerda – ou seja, se c_n não for um no algoritmo da soma – então o minuendo é menor que o subtraendo.

Observe que o resultado da operação, à primeira vista, não faz sentido:

$A = 010011,\ B = 110001$

$A + \left(\overline{B} + 1\right) = 010011 + 001111 = 100010 \neq A - B = -11110$

Mas, calculando o complemento a 2 do resultado:

$\overline{100010} + 1 = -(011101 + 1) = -011110$ (mágica?)