CIRCUITOS LÓGICOS
ARITMÉTICA: MULTIPLICAÇÃO

Marco A. Zanata Alves

Slides baseados nos slides de Rodrigo Hausen - CMCC – UFABC (2013)
http://compscinet.org/hausen/courses/circuitos/

MULTIPLICAÇÃO BINÁRIA

Algoritmo da multiplicação: mesma ideia usada na base decimal.

```
      11011
x       101
    -------
      11011
     00000
+   11011
   --------
   10000111
```

Note que a tabuada da multiplicação na base 2 é muito mais fácil.

×	0	1
0	0	0
1	0	1

MULTIPLICAÇÃO BINÁRIA

Algoritmo da multiplicação: mesma ideia usada na base decimal.

```
      11011
x       101
   --------
      11011
     00000
+   11011
   --------
   10000111
```

Note que a tabuada da multiplicação na base 2 é muito mais fácil.

Se A tem n algarismos e B tem m algarismos, então o produto $A * B$ terá, no máximo, $n + m$ algarismos.

×	0	1
0	0	0
1	0	1

MULTIPLICAÇÃO BINÁRIA

Note que não é necessário armazenar todas as parcelas da soma ao mesmo tempo.

$$\begin{array}{r} 11011 \\ \times\ \underline{00101} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11011 \\ \times\ \underline{00101} \\ 11011 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & 11011 \\ \times & \underline{\ \ 00101} \\ + & 11011 \\ & 00000{\color{red}0} \end{array} \leftarrow \text{desloca 1}$$

$$\begin{array}{rr} & 11011 \\ \times & \underline{\ \ 00101} \\ + & 011011 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & 11011 \\ \times & \underline{\ \ \ \ 00101} \\ + & 011011 \\ & 11011{\color{red}00} \end{array} \leftarrow \text{desloca 2}$$

$$\begin{array}{rr} & 11011 \\ \times & \underline{\ \ \ \ \ \ 00101} \\ + & 10000111 \end{array}$$

NÚMEROS RACIONAIS

O que acontece com os algoritmos da soma, subtração, multiplicação e divisão quando os números sendo operados não são inteiros?

NÚMEROS RACIONAIS

O que acontece com os algoritmos da soma, subtração, multiplicação e divisão quando os números sendo operados não são inteiros?

Sem perder a generalidade, iremos supor que A e B possuem k algarismos depois da vírgula. (E se eles não tiverem a mesma quantidade de algarismos após a vírgula?)

$$A = a_{n-1}\, a_{n-2}\, \dots a_2\, a_1\, a_0\, , a_{-1} \dots a_{-k}$$
$$B = b_{m-1}\, b_{m-2}\, \dots b_2\, b_1\, b_0\, , b_{-1} \dots b_{-k}$$

NÚMEROS RACIONAIS

Para a **soma** e a **subtração**: como os algoritmos são “copiados” da versão para números na base 10, a solução é simples: ignore, inicialmente a vírgula. Após a soma, recoloque a vírgula no seu lugar (conte $\boldsymbol{k}$ **algarismos à direita**).

Para a **multiplicação**: de novo, a inspiração vem da base decimal. Ignore, inicialmente a vírgula e, após a multiplicação, recoloque a vírgula no seu lugar (conte $\mathbf{2} * \boldsymbol{k}$ **algarismos à direita**).

MULTIPLICAÇÃO BINÁRIA DE RACIONAIS

Após a multiplicação, recoloque a vírgula no seu lugar (conte $2 * k$ algarismos à direita).

$$\begin{array}{r} 110{,}1 \\ \times\ \underline{010{,}0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1101 \\ \times\ \underline{0100} \\ 0000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1101 \\ \times\ \underline{\ \ 0100} \\ +\ \ 0000 \\ 0000\color{red}{0} \end{array}$$ ← desloca 1

$$\begin{array}{r} 1101 \\ \times\ \underline{\ \ 0100} \\ +\ 00000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1101 \\ \times\ \underline{\ \ \ \ 0100} \\ +\ \ \ 00000 \\ 1101\color{red}{00} \end{array}$$ ← desloca 2

$$\begin{array}{r} 110{,}1 \\ \times\ \underline{\ \ 010{,}0} \\ +\ 1101\color{red}{,00} \end{array}$$

REPRESENTAÇÃO NUMÉRICA

REPRESENTAÇÃO NUMÉRICA

Representação de números no papel: usamos tantos dígitos forem necessários.

Limitado apenas pela quantidade de papel, tempo disponível para escrever os dígitos, paciência. . .

REPRESENTAÇÃO NUMÉRICA

Representação de números no papel: usamos tantos dígitos forem necessários.

Limitado apenas pela quantidade de papel, tempo disponível para escrever os dígitos, paciência. . .

Número π:

```
3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058
209749445923078164062862089986280348253421170679821480
865132823066470938446095505822317253594081284811174502
841027019385211055596446229489549303819644288109756659
334461284756482337867831652712019091456485669234603486
104543266482133936072602491412737245870066063155881748
815209209628292540917153643678925903600113305305488204
665213841469519415116094330572703657595919530921861173
81932611793105118548074462379...
```

REPRESENTAÇÃO NUMÉRICA NUM COMPUTADOR DIGITAL

Recordando: em um computador digital **qualquer informação**, em última instância, é **representada por um número**.

Atualmente, os números são representados **internamente em binário** (por vários motivos, entre eles facilidade de fazer contas na **base 2**).

Um computador digital possui **espaço finito** para guardar informações.

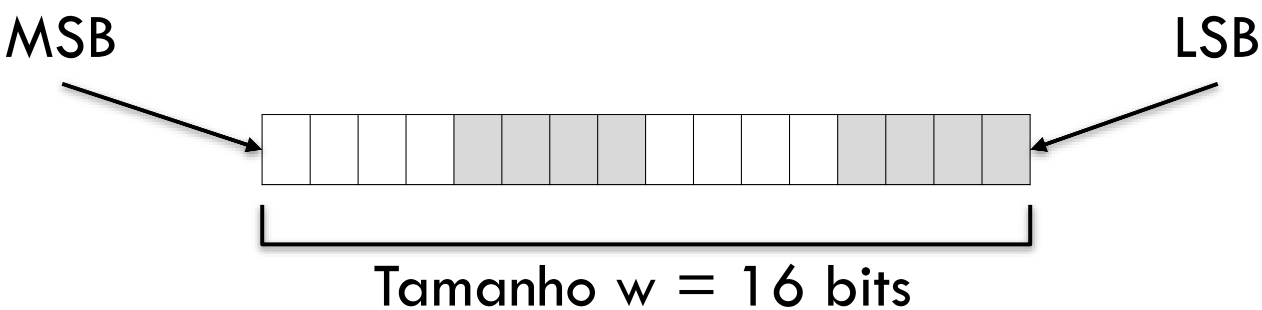
Por questões de eficiência, geralmente o processamento de dados (ou seja, números) não é feito algarismo binário por algarismo binário, e sim por **grupos de algarismos binários** de uma só vez.

BITS E PALAVRAS

Abreviação: algarismo binário = bit (do inglês ***b****inary dig****it***)

A unidade natural de processamento de um determinado sistema é chamada **palavra de dado**

Trata-se de uma sequência de bits com tamanho fixo que é processada em conjunto.



MSB = Most Significant Bit = bit mais significativo
LSB = Least Significant Bit = bit menos significativo

BITS E PALAVRAS

Tamanhos de palavras comuns são: 4, 8, 16, 32 e 64 bits. Nomes comuns para palavras:

- 8 bits = byte (binary term) ou octeto
- 4 bits = nibble

(curiosidade: nibble, em inglês, significa “mordidinha” = “small bite”)

Atenção: 10Mb/s vs. 10MB/s

REPRESENTANDO NÚMEROS EM PALAVRAS BINÁRIAS

Primeiro caso: número inteiro sem sinal ($\geq$ 0).

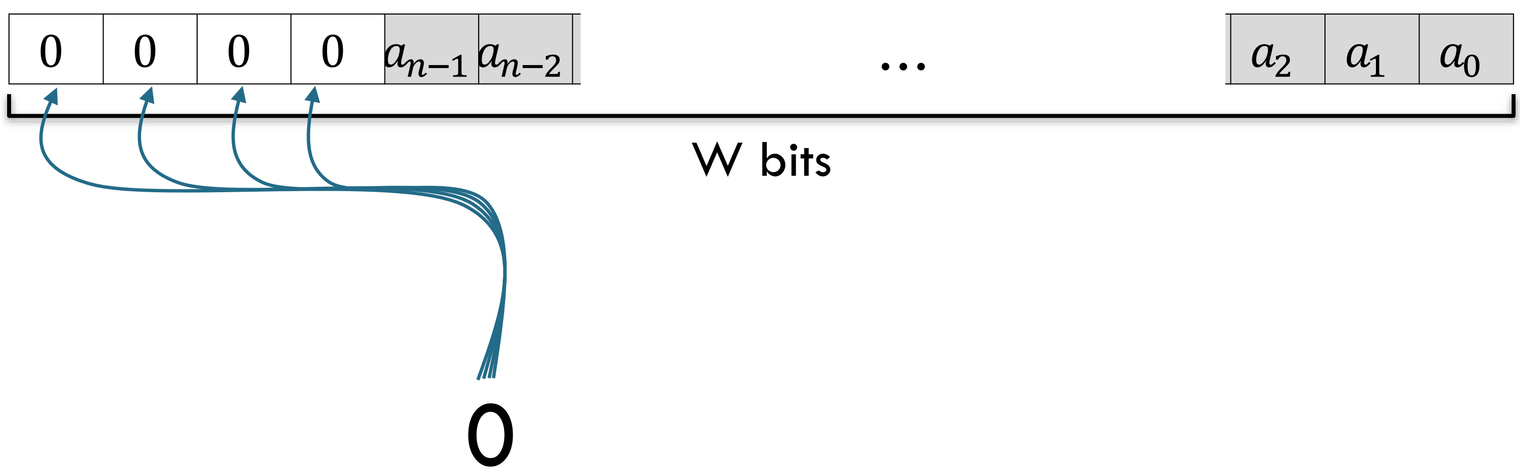
Como representar um número inteiro $A = (a_{n-1}\, a_{n-2}\ \ldots a_2\, a_1\, a_0)_2$ numa palavra de comprimento W ?

0	0	0	0	a_{n-1}	a_{n-2}	…	a_2	a_1	a_0

W bits

REPRESENTAÇÃO SEM SINAL

Como representar um número **inteiro sem sinal**
$A = (a_{n-1}\, a_{n-2}\, \ldots a_2\, a_1\, a_0)_2$ numa palavra de comprimento $W \geq n$?



REPRESENTANDO NÚMEROS EM PALAVRAS BINÁRIAS

Qual é o **maior inteiro** sem sinal que podemos representar?

Exemplo: quais inteiros sem sinal podemos representar com 3 bits?

REPRESENTANDO NÚMEROS EM PALAVRAS BINÁRIAS

Qual é o **maior inteiro** sem sinal que podemos representar?

Exemplo: quais inteiros sem sinal podemos representar com 3 bits?

000	001	010	011	100	101	110	111
0	1	2	3	4	5	6	7

$De\, 0\, até\, 7 = 2^3 - 1$

REPRESENTANDO NÚMEROS: INTEIROS SEM SINAL

Inteiros sem sinal em palavras binárias com w bits.

Palavra		Decimal
00...000	=	0
00...001	=	1
00…010	=	2
	…	
11...110	=	?
11...111	=	? maior inteiro sem sinal com w bits

O próximo número na sequência, que não cabe em *w* bits, é…

REPRESENTANDO NÚMEROS: INTEIROS SEM SINAL

Inteiros sem sinal em palavras binárias com w bits.

Palavra		Decimal
00...000	=	0
00...001	=	1
00…010	=	2
	…	
11...110	=	2^{w-2}
11...111	=	2^{w-1} = maior inteiro sem sinal com w bits
100...000	=	2^{w}

O próximo número na sequência, que não cabe em *w* bits, é

$$(100\ldots000)_2 = 0 * 2^0 + 0 * 2^1 + \cdots + 0 * 2^{w-1} + 1 * 2^w = 2^w$$

REPRESENTANDO NÚMEROS: INTEIROS COM SINAL

Precisamos reservar espaço na palavra para representar, além dos algarismos do número, alguma informação sobre o sinal.

Existem duas possibilidades para o sinal:

REPRESENTANDO NÚMEROS: INTEIROS COM SINAL

Precisamos reservar espaço na palavra para representar, além dos algarismos do número, alguma informação sobre o sinal.

Existem duas possibilidades para o sinal:

- Podemos usar um dos bits para representar o sinal.
- Podemos usar complemento de 2 (como vimos na subtração).

SINAL MAGNITUDE

REPRESENTAÇÃO SINAL-MAGNITUDE

Esta representação é conhecida como **sinal-magnitude**.

Sinal +: bit de sinal 0

Sinal −: bit de sinal 1

s	a_{w-2}	a_{w-3}	...	a_2	a_1	a_0

W bits

REPRESENTAÇÃO SINAL-MAGNITUDE

Esta representação é conhecida como **sinal-magnitude**.

Sinal +: bit de sinal 0

Sinal –: bit de sinal 1

s	a_{w-2}	a_{w-3}	...	a_2	a_1	a_0

W bits

Ex.: inteiros representados em sinal-magnitude com 3 bits

000	001	010	011	100	101	110	111
+0	+1	+2	+3	-0	-1	-2	-3

REPRESENTAÇÃO SINAL-MAGNITUDE

Menor número:

$$111\ldots111 = -(\underbrace{11\ldots111}_{\text{W-1uns}})_2 = -(100\ldots000 - 1)_2 = -2^{w-1} + 1$$

1	1	1	...	1	1	1

W bits

REPRESENTAÇÃO SINAL-MAGNITUDE

Menor número:

$$111 \ldots 111 = -(11 \ldots 111)_2 = -(100 \ldots 000 - 1)_2 = -2^{w-1} + 1$$

Maior número:

$$011 \ldots 111 = +(\underbrace{11 \ldots 111}_{\text{W-1uns}})_2 = +(100 \ldots 000 - 1)_2 = 2^{w-1} - 1$$

0	1	1	...	1	1	1

W bits

REPRESENTAÇÃO SINAL-MAGNITUDE

Vantagens:

- Simples de entender
- Simples de implementar

Desvantagens:

- Zero tem duas representações: $00 \ldots 000 = +0 \; e \; 10 \ldots 000 = -0$
- Complica a aritmética: é necessário tratar o sinal separadamente na hora de fazer as contas de soma e subtração.

REPRESENTAÇÃO SINAL-MAGNITUDE

Como representar um número inteiro $A = (a_{n-1}\, a_{n-2}\ \ldots a_2\, a_1\, a_0)_2$ numa palavra de comprimento $W \geq n$? Se for positivo, e se for negativo?

REPRESENTAÇÃO SINAL-MAGNITUDE

Como representar um número inteiro $A = (a_{n-1}\, a_{n-2}\ \ldots a_2\, a_1\, a_0)_2$ numa palavra de comprimento $W \geq n$?

Se positivo

a_{n-1}	0	0	0	0	a_{n-2}	…	a_2	a_1	a_0

W bits

Se negativo

a_{n-1}	0	0	0	0	a_{n-2}	…	a_2	a_1	a_0

W bits

COMPLEMENTO DE 2

REPRESENTAÇÃO EM COMPLEMENTO DE 2

Vimos que, uma maneira de fazer subtrações na forma $A - B$ era tomar o complemento a dois $\overline{B} + 1$ e fazer a soma $A + (\overline{B} + 1)$

Note que se $-B$ é um número negativo, então $-B = 0 - B$

Suponha que estamos representando todos os números positivos em palavras binárias de tamanho W na forma:

S	a_{w-1}	a_{w-2}	…	a_2	a_1	a_0

REPRESENTAÇÃO EM COMPLEMENTO DE 2

Vimos que, uma maneira de fazer subtrações na forma $A - B$ era tomar o complemento a dois $\overline{B} + 1$ e fazer a soma $A + (\overline{B} + 1)$

Note que se $-B$ é um número negativo, então $-B = 0 - B$

Suponha que estamos representando todos os números positivos em palavras binárias de tamanho W na forma:

s	a_{w-2}	a_{w-3}	...	a_2	a_1	a_0

Ex.: Calcule $0 - (11)_{10}$ usando complemento de 2 em palavras com 5 bits, sendo que o primeiro bit 0 representa sinal positivo.

$0_{10} = (00000)_2$ $11_{10} = (01011)_2$

Complemento de 2 = $01011 = 10100 + 1 = 10101$

$-1011_2 = 0 - 1011_2 = 0 + 10101_2 = 10101_2$, bit de sinal 1

REPRESENTAÇÃO EM COMPLEMENTO DE 2

Representação de inteiros com sinal em complemento de 2.

Números positivos

0	a_{w-2}	a_{w-3}	...	a_2	a_1	a_0

$$= +(a_{w-2}\ a_{w-1} \ldots a_1\ a_0)_2$$

Números negativos

1	a_{w-2}	a_{w-3}	...	a_2	a_1	a_0

$$= -(\overline{a_{w-2}\ a_{w-1} \ldots a_1\ a_0} + 1)_2$$

A que número corresponde a palavra $(1011100)_2$?

REPRESENTAÇÃO EM COMPLEMENTO DE 2

Representação de inteiros com sinal em complemento de 2.

Números positivos

0	a_{w-2}	a_{w-3}	...	a_2	a_1	a_0

$$= +(a_{w-2}\ a_{w-1} \ldots a_1\ a_0)_2$$

Números negativos

1	a_{w-2}	a_{w-3}	...	a_2	a_1	a_0

$$= -(\overline{a_{w-2}\ a_{w-1} \ldots a_1\ a_0} + 1)_2$$

A que número corresponde a palavra $(1011100)_2$?

Bit de sinal 1 = número negativo.

$$\overline{011100} + 1 = -(100011 + 1) = -(100100) = -(36)_{10}$$

REPRESENTAÇÃO EM COMPLEMENTO DE 2

Logo, podemos notar que caso o número esteja em representação de complemento de 2, devemos ignorar o primeiro digito mais significativo, pois este indica o sinal.

Caso o número seja negativo, a conversão entre bases deve acontecer após a conversão para complemento de 2.

REPRESENTAÇÃO EM COMPLEMENTO DE 2

Inteiros representados em complemento de dois em palavras de 3 bits:

$011 = +3_{10}$

$010 = +2_{10}$

$001 = +1_{10}$

$000 = 0_{10}$

$111 =?_{10}$

$110 =?_{10}$

$101 =?_{10}$

$100 =?_{10}$

REPRESENTAÇÃO EM COMPLEMENTO DE 2

Inteiros representados em complemento de dois em palavras de 3 bits:

$011 = +3_{10}$

$010 = +2_{10}$

$001 = +1_{10}$

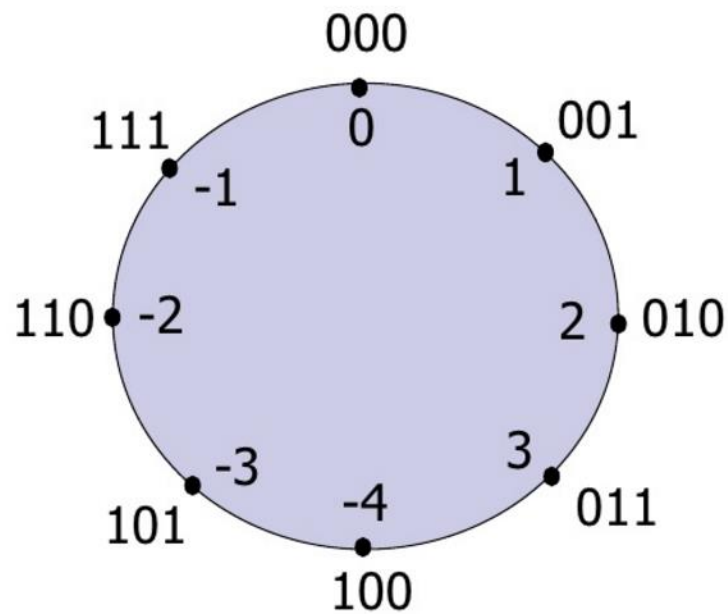
$000 = 0_{10}$

$111 = -\left(\overline{11} + 1\right)_2 = -(01)_2 = -1_{10}$

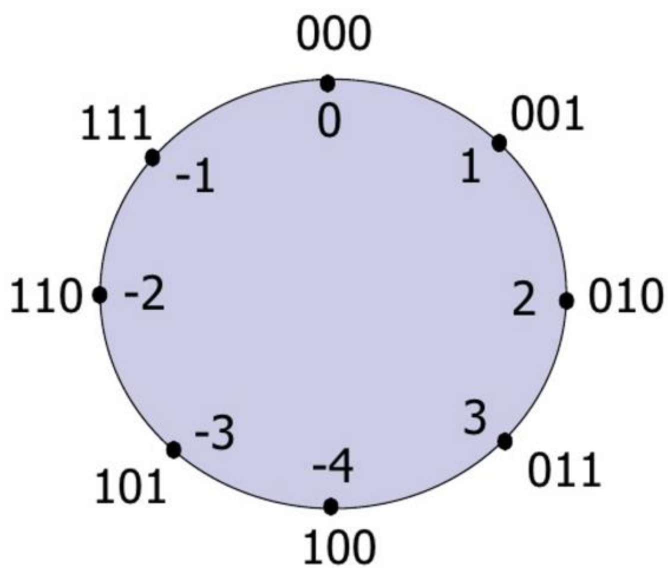
$110 = -\left(\overline{10} + 1\right)_2 = -(11)_2 = -2_{10}$

$101 = -\left(\overline{01} + 1\right)_2 = -(10)_2 = -3_{10}$

$100 = -\left(\overline{00} + 1\right)_2 = -(100)_2 = -4_{10}$



REPRESENTAÇÃO EM COMPLEMENTO DE 2



Note que o intervalo de representação não é simétrico

Como só há uma representação para 0, é possível representar um inteiro negativo a mais

somas/subtrações com esta representação são simples!

$$1 + (-3) = 001 + 101 = 110 = -2$$

REPRESENTAÇÃO EM COMPLEMENTO DE 2

Menor número:

$$100\ldots000 = -(0\underbrace{1\ldots111}_{\text{W-1uns}} + 1)_2 = -(\mathbf{1}00\ldots000)_2 = -2^{w-1}$$

1	1	1	…	1	1	1

W bits

REPRESENTAÇÃO EM COMPLEMENTO DE 2

Menor número:

$$100\ldots000 = -(01\ldots111 + 1)_2 = -(\mathbf{1}00\ldots000)_2 = -2^{w-1}$$

Maior número:

$$011\ldots111 = +(0\underbrace{11\ldots111}_{\text{W-1 uns}})_2 = 2^{w-1} - 1$$

Assim como sinal magnitude!

0	1	1	...	1	1	1

W bits

REPRESENTAÇÃO EM COMPLEMENTO DE 2

Vantagens:

- Representação única para o zero
- Somas e subtrações são feitas da mesma forma que para números sem sinal

Desvantagens:

- Não é tão intuitivo para nós (indiferente para computador)
- Comparações não são tão simples. Ex.: $(1)_{10} = (\mathbf{001})_{\mathbf{2}} > (\mathbf{101})_{\mathbf{2}} = (-3)_{10}$

REPRESENTAÇÃO EM COMPLEMENTO DE 2

Como representar um número inteiro em **complemento de 2**
$A = (a_{n-1}\, a_{n-2}\, \ldots a_2\, a_1\, a_0)_2$ numa palavra de comprimento $W \geq n$?
Se for positivo, e se for negativo?

REPRESENTAÇÃO EM COMPLEMENTO DE 2

Como representar um número inteiro em complemento de 2
$A = (a_{n-1}\, a_{n-2}\ \ldots a_2\, a_1\, a_0)_2$ numa palavra de comprimento $W \geq n$?
Se for positivo, e se for negativo?

Se positivo

Se negativo

REPRESENTAÇÃO EM COMPLEMENTO DE 2

Como representar um número inteiro em complemento de 2
$A = (a_{n-1}\, a_{n-2}\ \ldots a_2\, a_1\, a_0)_2$ numa palavra de comprimento $W \geq n$?
Se for positivo, e se for negativo?

Se positivo

Se negativo

LIMITAÇÕES EM ADIÇÕES

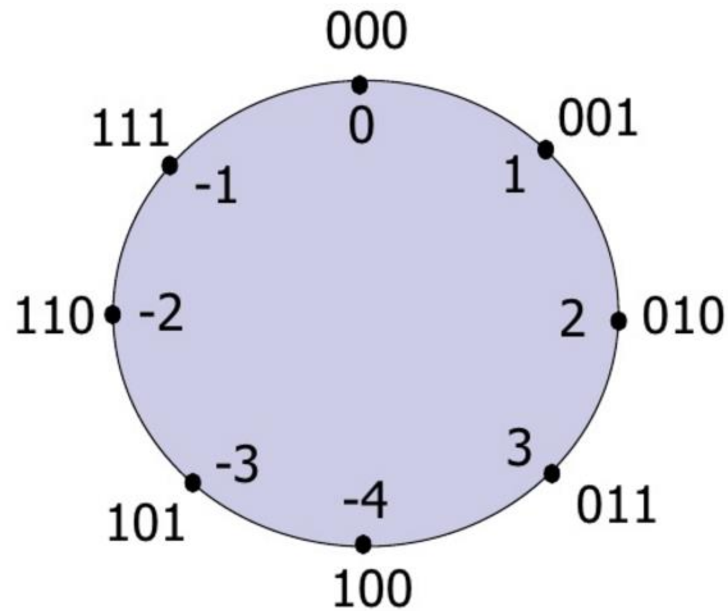
LIMITAÇÕES NA REPRESENTAÇÃO

Toda vez que uma operação precisar de mais bits do que os disponíveis na representação que estamos utilizando um erro (overflow) ocorre.

Considere que estamos utilizando complemento de dois, com representação de 3 bits.

Ao somar +1 no número 011 (3_{10}) causamos um erro, devido à representação com 3 bits.

$$011 + 1 = 100 = (-4_{10})$$



DETECÇÃO DE OVERFLOW

A ocorrência de overflow pode ser detectada examinando-se o bit de sinal do resultado e comparando-o com os bits de sinal dos números que estão sendo adicionados.

Nos computadores, um circuito especial é usado para detectar qualquer condição de overflow para indicar que a resposta está errada.

Overflow só ocorre quando somando dois números de mesmo sinal (positivos ou negativos).

Quando temos dois números de mesmo sinal, devemos verificar se o resultado da soma tem mesmo sinal dos operadores. (Caso negativo temos um overflow)