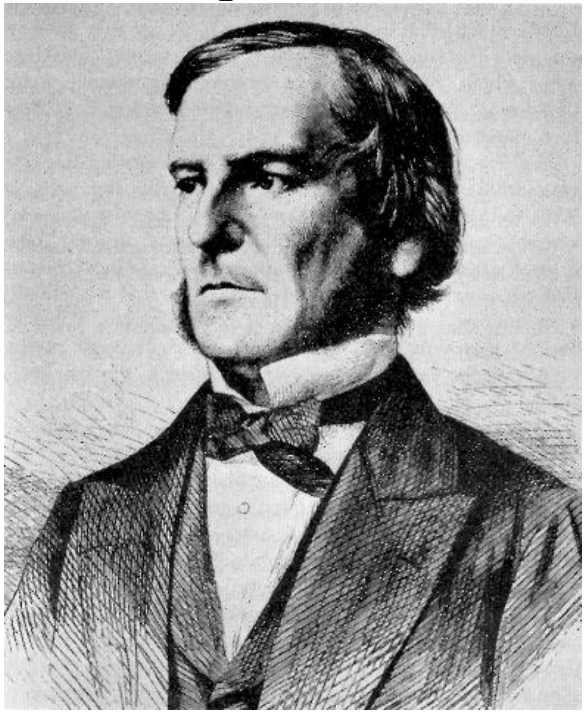
CIRCUITOS LÓGICOS
FATORAÇÃO LÓGICA

Marco A. Zanata Alves

Slides baseados nos slides de José Augusto Baranauskas - CMCC – FFCLRP-USP (2012)
http://dcm.fmrp.usp.br/~augusto

AULA PASSADA: EXPRESSÕES E FUNÇÕES LÓGICAS



Álgebra booleana [Boole, 1854]

Álgebra onde há apenas dois valores válidos: falso e verdadeiro.

Variável booleana: pode assumir um dos dois valores booleanos válidos.

- Geralmente denotada por uma letra maiúscula: A, B, C , X , Y , Z , . . .

George Boole (Lincoln, 02/11/1815 - Ballintemple, 08/12/1864) foi um filósofo britânico, criador da álgebra booliana, fundamental para o desenvolvimento da computação moderna
http://pt.wikipedia.org/wiki/George_Boole

AULA PASSADA: EXPRESSÕES E FUNÇÕES LÓGICAS

Tabela verdade da conjunção (e)

X	Y	$X \cdot Y$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**F**

Tabela verdade da disjunção (ou)

X	Y	$X + Y$
V	V	**V**
V	F	**V**
F	V	**V**
F	F	**F**

Tabela verdade da negação (não)

X	$\overline{X}$
V	**F**
F	**V**

Conjunção (e): resultado verdadeiro apenas se X e Y forem verdadeiros.

Disjunção (ou): resultado verdadeiro apenas se Y ou Y forem verdadeiros.

Negação (não): resultado só será verdadeiro se X não for verdadeiro.

AULA PASSADA: EXPRESSÕES E FUNÇÕES LÓGICAS

Expressões lógicas:

$$\overline{1} + (0 \cdot 1) = ?$$

$$\overline{X} \cdot Y + X \cdot \overline{Y} = ?$$

$$\overline{A + \overline{B} \cdot C + A \cdot C + B} = ?$$

Funções lógicas: dadas por uma expressão ou tabela verdade

$$F(X,Y) = \overline{X} \cdot Y + X \cdot Y \quad \rightarrow$$

X	Y	$F(X,Y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

REGRAS BÁSICAS DA ÁLGEBRA BOOLEANA

	Propriedade	OU	E
P1	Identidade	$X + 1 = 1$	$X \cdot 0 = 0$
P2	Elemento Neutro	$X + 0 = X$	$X \cdot 1 = X$
P3	Idempotência	$X + X = X$	$X \cdot X = X$
P4	Involução	$\overline{\overline{X}} = X$	$\overline{\overline{X}} = X$
P5	Complemento	$X + \overline{X} = 1$	$X \cdot \overline{X} = 0$
P6	Comutatividade	$X + Y = Y + X$	$X \cdot Y = Y \cdot X$
P7	Associatividade	$(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$	$(X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z)$
P8	Distributividade	$X + (Y \cdot Z) = (X + Y) \cdot (X + Z)$	$X \cdot (Y + Z) = (X \cdot Y) + (X \cdot Z)$
P9	Cobertura	$X \cdot (X + Z) = X$	$X + (X \cdot Y) = X$
P10	Combinação	$(X \cdot Y) + (X \cdot \overline{Y}) = X$	$(X + Y) \cdot (X + \overline{Y}) = X$
P11	Consenso	$(X \cdot Y) + (\overline{X} \cdot Z) + (Y \cdot Z)$ $= (X \cdot Y) + (\overline{X} \cdot Z)$	$(X + Y) \cdot (\overline{X} + Z) \cdot (Y + Z)$ $= (X + Y) \cdot (\overline{X} + Z)$
P12	De Morgan	$\overline{(X + Y)} = \overline{X} \cdot \overline{Y}$	$\overline{(X \cdot Y)} = \overline{X} + \overline{Y}$

UM PROBLEMA METEOROLÓGICO

Exemplo 1: O tempo para o dia seguinte na cidade de Booleville é bem regular e fácil de prever.

O meteorologista da cidade criou uma tabela para prever se haverá chuva no dia seguinte (representada pela variável C) a partir de quatro variáveis cujo valor depende das condições meteorológicas do dia anterior.

V – se está ventando

F – se faz frio

U – se está úmido

N – se está nublado

As quatro variáveis são medidas pelo meteorologista e ele atribui um valor 0 (falso) ou 1 (verdadeiro) para cada uma delas.

DE TABELA VERDADE PARA EXPRESSÃO LÓGICA

Previsão do tempo em Booleville: C (chuva amanhã) função lógica de V (vento hoje), F (frio hoje), U (dia úmido hoje) e N (nublado hoje).

V	F	U	N	C
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1

V	F	U	N	C
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

DE TABELA VERDADE PARA EXPRESSÃO LÓGICA

Previsão do tempo em Booleville: C (chuva amanhã) função lógica de V (vento hoje), F (frio hoje), U (dia úmido hoje) e N (nublado hoje).

V	F	U	N	C
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1

$$\rightarrow \overline{V} \cdot \overline{F} \cdot U \cdot N$$

V	F	U	N	C
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

DE TABELA VERDADE PARA EXPRESSÃO LÓGICA

Previsão do tempo em Booleville: C (chuva amanhã) função lógica de V (vento hoje), F (frio hoje), U (dia úmido hoje) e N (nublado hoje).

V	F	U	N	C	
0	0	0	0	0	
0	0	0	1	0	
0	0	1	0	0	
0	0	1	1	1	$\rightarrow \overline{V} \cdot \overline{F} \cdot U \cdot N$
0	1	0	0	0	
0	1	0	1	1	$\rightarrow \overline{V} \cdot F \cdot \overline{U} \cdot N$
0	1	1	0	1	$\rightarrow \overline{V} \cdot F \cdot U \cdot \overline{N}$
0	1	1	1	1	$\rightarrow \overline{V} \cdot F \cdot U \cdot N$

V	F	U	N	C	
1	0	0	0	0	
1	0	0	1	1	$\rightarrow V \cdot \overline{F} \cdot \overline{U} \cdot N$
1	0	1	0	1	$\rightarrow V \cdot \overline{F} \cdot U \cdot \overline{N}$
1	0	1	1	0	
1	1	0	0	0	
1	1	0	1	0	
1	1	1	0	1	$\rightarrow V \cdot F \cdot U \cdot \overline{N}$
1	1	1	1	1	$\rightarrow V \cdot F \cdot U \cdot N$

DE TABELA VERDADE PARA EXPRESSÃO LÓGICA

$$C(V,F,U,N) = (\overline{V}\cdot\overline{F}\cdot U\cdot N) + (\overline{V}\cdot F\cdot\overline{U}\cdot N) + (\overline{V}\cdot F\cdot U\cdot\overline{N}) + (\overline{V}\cdot F\cdot U\cdot N)$$

$$+(V\cdot\overline{F}\cdot\overline{U}\cdot N) + (V\cdot\overline{F}\cdot U\cdot\overline{N}) + (V\cdot F\cdot U\cdot\overline{N}) + (V\cdot F\cdot U\cdot N)$$

V	F	U	N	C	
0	0	0	0	0	
0	0	0	1	0	
0	0	1	0	0	
0	0	1	1	1	$\rightarrow \overline{V}\cdot\overline{F}\cdot U\cdot N$
0	1	0	0	0	
0	1	0	1	1	$\rightarrow \overline{V}\cdot F\cdot\overline{U}\cdot N$
0	1	1	0	1	$\rightarrow \overline{V}\cdot F\cdot U\cdot\overline{N}$
0	1	1	1	1	$\rightarrow \overline{V}\cdot F\cdot U\cdot N$

V	F	U	N	C	
1	0	0	0	0	
1	0	0	1	1	$\rightarrow V\cdot\overline{F}\cdot\overline{U}\cdot N$
1	0	1	0	1	$\rightarrow V\cdot\overline{F}\cdot U\cdot\overline{N}$
1	0	1	1	0	
1	1	0	0	0	
1	1	0	1	0	
1	1	1	0	1	$\rightarrow V\cdot F\cdot U\cdot\overline{N}$
1	1	1	1	1	$\rightarrow V\cdot F\cdot U\cdot N$

DE TABELA VERDADE PARA EXPRESSÃO LÓGICA

Para facilitar a escrita, quando escrevemos uma conjunção, podemos considerar que o sinal "·" está implícito, como fazemos na álgebra comum

$$C(V,F,U,N) = \left(\overline{VF}UN\right) + \left(\overline{V}F\overline{U}N\right) + \left(\overline{V}FU\overline{N}\right) + \left(\overline{V}FUN\right)$$

$$+(V\overline{FU}N) + (V\overline{F}U\overline{N}) + (VFU\overline{N}) + (VFUN)$$

FORMAS CANÔNICAS

EXTRAINDO FUNÇÕES DE TABELAS VERDADE

Determine, se possível, uma expressão para a função F dada pela seguinte tabela verdade.

A	B	C	$F(A,B,C)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

FORMAS NORMAIS (CANÔNICAS)

Toda expressão booleana pode ser escrita em uma forma padronizada, denominada forma normal ou forma canônica

Duas formas normais são:

- Forma Normal Disjuntiva (FND), Soma de Produtos ou **Soma de Mintermos**

- Forma Normal Conjuntiva (FNC), Produto de Somas ou **Produto de Maxtermos**

MINTERMOS

Mintermos (ou minitermos)

Variável com valor 1 é deixada intacta

Variável com valor 0 é alterada pela sua negação

Variáveis de uma linha são conectadas por (e lógico)

A	B	C	MINTERMO
0	0	0	$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$
0	0	1	$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$
0	1	0	$\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$
0	1	1	$\overline{A} \cdot B \cdot C$
1	0	0	$A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$
1	0	1	$A \cdot \overline{B} \cdot C$
1	1	0	$A \cdot B \cdot \overline{C}$
1	1	1	$A \cdot B \cdot C$

MAXTERMOS

Maxtermos (ou maxitermos)

Variável com valor 0 é deixada intacta

Variável com valor 1 é alterada pela sua negação

Variáveis de uma linha são conectadas por (ou lógico)

A	B	C	MAXTERMO
0	0	0	$A + B + C$
0	0	1	$A + B + \overline{C}$
0	1	0	$A + \overline{B} + C$
0	1	1	$A + \overline{B} + \overline{C}$
1	0	0	$\overline{A} + B + C$
1	0	1	$\overline{A} + B + \overline{C}$
1	1	0	$\overline{A} + \overline{B} + C$
1	1	1	$\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$

EXEMPLO

SITUAÇÃO	A	B	C	S
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

Vamos extrair os mintermos e maxtermos dessa tabela verdade.

FORMA NORMAL DISJUNTIVA

Mintermo (ou minitermo) é o termo produto associado à cada linha da tabela verdade, no qual todas as variáveis de entrada estão presentes

Dado um dado mintermo, se substituirmos os valores das variáveis associadas, obteremos 1 (saída verdadeira)

Porém, se substituirmos nesse mesmo mintermo quaisquer outras combinações de valores, obteremos 0

Dessa forma, se quisermos encontrar a equação para uma função a partir de sua tabela verdade, basta montarmos um OU entre os mintermos associados aos 1s da função

FND: EXEMPLO

Saída S é uma função das variáveis de entrada A, B e C

Os valores de (A,B,C) para os quais S=1 encontram-se nas situações 2, 3, 5 e 6

Os mintermos associados a essas condições (ou seja, os mintermos 1) são mostrados na tabela ao lado

Logo, a expressão em soma de produtos (FND) para S será o OU entre estes produtos

$$S = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

Entrada	A	B	C	S	MINTERMO
0	0	0	0	**0**	
1	0	0	1	**0**	
2	0	1	0	**1**	$\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$
3	0	1	1	**1**	$\overline{A} \cdot B \cdot C$
4	1	0	0	**0**	
5	1	0	1	**1**	$A \cdot \overline{B} \cdot C$
6	1	1	0	**1**	$A \cdot B \cdot \overline{C}$
7	1	1	1	**0**	

FORMA NORMAL CONJUNTIVA

Maxtermo (ou maxitermo) é o termo soma associado à cada linha da tabela verdade, no qual todas as variáveis de entrada estão presentes

Dado um dado maxtermo, se substituirmos os valores das variáveis associadas, obteremos 0

Porém, se substituirmos nesse mesmo maxtermo quaisquer outras combinações de valores, obteremos 1 (saída verdadeira)

Dessa forma, se quisermos encontrar a equação para uma função a partir de sua tabela verdade, basta montarmos um E entre os maxtermos associados aos 0s da função

FNC: EXEMPLO

Saída S é uma função das variáveis de entrada A, B e C

Os valores de (A,B,C) para os quais S=0 encontram-se nas situações 0, 1, 4 e 7

Os maxtermos associados a essas condições (ou seja, os maxtermos 0) são mostrados na tabela ao lado

Logo, a expressão em produto de somas (FNC) para S será o E entre estas somas

$$S = (A + B + C) \cdot (A + B + \overline{C}) \cdot (\overline{A} + B + C) \cdot (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$$

Entrada	A	B	C	S	MAXTERMO
0	0	0	0	**0**	$A + B + C$
1	0	0	1	**0**	$A + B + \overline{C}$
2	0	1	0	**1**	
3	0	1	1	**1**	
4	1	0	0	**0**	$\overline{A} + B + C$
5	1	0	1	**1**	
6	1	1	0	**1**	
7	1	1	1	**0**	$\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$

SIMPLIFICAÇÃO A PARTIR DA FORMA NORMAL

É importante lembrar que qualquer expressão booleana pode ser escrita de forma padronizada, obtida a partir da tabela verdade

- Produto de Maxtermos
- Soma de Mintermos

Uma vez obtida a forma normal de uma função booleana, é possível simplificá-la por meio de manipulação algébrica, respeitando os postulados e propriedades da álgebra booleana, com visto anteriormente

FATORAÇÃO LÓGICA

MOTIVAÇÃO

O estudo da simplificação de circuitos lógicos requer o conhecimento da álgebra de Boole, por meio de seus postulados, propriedades, equivalências, etc.

De fato, na álgebra de Boole encontram-se os fundamentos da eletrônica digital de circuitos

POSTULADOS & PROPRIEDADES

Na álgebra booleana há postulados (axiomas) a partir dos quais são estabelecidas várias propriedades

Existem várias propriedades da negação (complemento, inversor), adição (porta E) e soma (porta OU)

Estas propriedades podem ser verificadas como equivalências lógicas

Para demonstrar cada uma, basta utilizar as tabelas-verdade, constatando a equivalência

SIMPLIFICAÇÃO DE EXPRESSÕES BOOLEANAS

Usando a álgebra booleana é possível simplificar expressões

A fatoração que consiste na aplicação dos postulados e propriedades da álgebra booleana, com o objetivo de simplificar a expressão

Como cada circuito corresponde a uma expressão, simplificações de expressões levam a simplificações de circuitos

Há duas formas para simplificar expressões

- Fatoração
- Mapas de Veitch-Karnaugh

Veremos, a seguir, o processo de fatoração

REGRAS BÁSICAS DA ÁLGEBRA BOOLEANA

	Propriedade	OU	E
P1	Identidade	$X + 1 = 1$	$X \cdot 0 = 0$
P2	Elemento Neutro	$X + 0 = X$	$X \cdot 1 = X$
P3	Idempotência	$X + X = X$	$X \cdot X = X$
P4	Involução	$\overline{\overline{X}} = X$	$\overline{\overline{X}} = X$
P5	Complemento	$X + \overline{X} = 1$	$X \cdot \overline{X} = 0$
P6	Comutatividade	$X + Y = Y + X$	$X \cdot Y = Y \cdot X$
P7	Associatividade	$(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$	$(X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z)$
P8	Distributividade	$X + (Y \cdot Z) = (X + Y) \cdot (X + Z)$	$X \cdot (Y + Z) = (X \cdot Y) + (X \cdot Z)$
P9	Cobertura	$X \cdot (X + Z) = X$	$X + (X \cdot Y) = X$
P10	Combinação	$(X \cdot Y) + (X \cdot \overline{Y}) = X$	$(X + Y) \cdot (X + \overline{Y}) = X$
P11	Consenso	$(X \cdot Y) + (\overline{X} \cdot Z) + (Y \cdot Z)$ $= (X \cdot Y) + (\overline{X} \cdot Z)$	$(X + Y) \cdot (\overline{X} + Z) \cdot (Y + Z)$ $= (X + Y) \cdot (\overline{X} + Z)$
P12	De Morgan	$\overline{(X + Y)} = \overline{X} \cdot \overline{Y}$	$\overline{(X \cdot Y)} = \overline{X} + \overline{Y}$

EXERCÍCIO

Mostre, usando simplificação por postulados e propriedades, ou seja, por transformações algébricas que:

$A+A.B = A$

$A.(A+B) = A$

SOLUÇÃO

A+A.B = A

- A + A.B
- = A.(1+B) distributiva
- = A.(1) cobertura da adição
- = A identidade da multiplicação

A.(A+B) = A

- A.(A+B)
- = (A.A) + (A.B) distributiva
- = A + (A.B) cobertura da multiplicação
- = A pela prova do exercício acima

EXERCÍCIO

Idem ao exercício anterior

$A + A'.B = A + B$

$(A+B).(A+C) = A + B.C$

SOLUÇÃO

$A + A'.B = A + B$

- $A + A'.B = (A + A'.B)''$ identidade do complemento
- $= (A' . (A'.B)')' = (A' . (A + B))'$ De Morgan
- $= (A'.A + A'.B)'$ distributiva
- $= (0 + A'.B)'$ elemento neutro da multiplicação
- $= (A'.B)'$ identidade da adição
- $= A + B$ De Morgan

$A + A'.B = A + B$

- $A + A'.B = (A + A').(A+ B)$ distributiva
- $= 1.(A+B)$ elemento neutro da adição
- $= A + B$ identidade da multiplicação

SOLUÇÃO

(A+B).(A+C) = A + B.C

- (A+B).(A+C)
- = A.A + A.C + B.A + B.C distributiva
- = A.A + A.C + A.B + B.C comutativa
- = A + A.C + A.B + B.C cobertura da multiplicação
- = A + A.(C+B) + B.C distributiva
- = A.(1 + (C+B)) + B.C distributiva
- = A.(1) + B.C identidade da adição
- = A + B.C identidade da multiplicação

EXERCÍCIO

Simplifique as expressões:

$S = A'.B'.C' + A'.B.C' + A.B'.C$

$S = A'.B + A'.B$

SOLUÇÃO

$S = A'.B'.C' + A'.B.C' + A.B'.C$

- $= A'.C'.B' + A'.C'.B + A.B'.C$
- $= A'.C'.(B' + B) + A.B'.C$
- $= A'.C'.(1) + A.B'.C$
- $= A'.C' + A.B'.C$

$S = A'.B + A'.B'$

- $= A'.(B+B')$
- $= A'.(1)$
- $= A'$

EXERCÍCIO

Simplifique as expressões:

$S = A'.B'.C' + A'.B.C + A'.B.C' + A.B'.C' + A.B.C'$

$S = (A+B+C).(A'+B+C)$

SOLUÇÃO

$S = A'.B'.C' + A'.B.C + A'.B.C' + A.B'.C' + A.B.C'$

$= A'.B'.C' + A'.B.C + A'.B.C' + A.B'.C' + A.B.C'$

$= A'.B.C + (A'.B' + A'.B + A.B' + A.B).C'$

$= A'.B.C + (A'.B' + A'.B + A.B' + A.B).C'$

$= A'.B.C + (A'.(B' + B) + A.(B' + B)).C'$

$= A'.B.C + (A'.(1) + A.(1)).C'$

$= A'.B.C + (A' + A).C'$

$= A'.B.C + (1).C'$

$= A'.B.C + C'$ (identidade $X+(X'.Y) = X+Y$)

$= A'.B + C'$

SOLUÇÃO

$S = (A+B+C).(A'+B+C)$

$= A.A' + A.B + A.C + B.A' + B.B + B.C + C.A' + C.B + C.C$

$= 0 + A.B + A.C + `A.B + B + A'.C + C$

$= A.B + A'.B + A.C + A'.C + B + C$

$= B \, . \, (A+A') + C \, . \, (A + A') + B + C$

$= B + B + C + C$

$= B + C$

MAIS EXERCÍCIOS

Simplifique as seguintes equações:

$$Y = (A \cdot C) + \left(\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C\right) = C \cdot (A + \overline{B})$$

$$Y = \overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \left(\overline{A + \overline{C}}\right) = \overline{A}$$

$$Y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,C\,\overline{D} + ABD + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D} + B\,\overline{C}\,D + \overline{A} = \overline{A} + \overline{B}\,\overline{D} + \overline{C}\,D + B\,D$$