

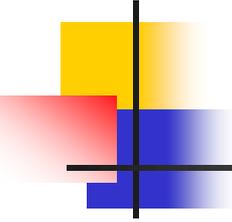
Cálculo Numérico

Módulo III

Resolução Numérica de Equações (Parte III)

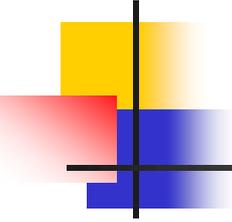
Profs.: Bruno Correia da Nóbrega Queiroz
José Eustáquio Rangel de Queiroz
Marcelo Alves de Barros





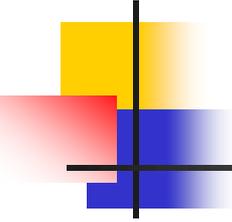
Análise Comparativa dos Métodos

- **Critérios de Comparação**
 - ▶ **Garantias de Convergência**
 - ▶ **Rapidez de Convergência**
 - ▶ **Esforço Computacional**



Análise Comparativa dos Métodos

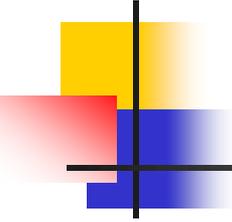
- **Garantias de Convergência dos Métodos**
 - ▶ ***Bisseccção e Falsa Posição***
 - **Convergência garantida**, desde que a função seja **contínua** num intervalo $[a,b]$, tal que $f(a)f(b) < 0$
 - ▶ ***Ponto Fixo, Newton-Raphson e Secante***
 - Condições **mais restritivas** de convergência
 - Se as condições de convergência forem **satisfeitas**, os dois últimos métodos são **mais rápidos** do que os demais estudados



Análise Comparativa dos Métodos

■ Rapidez de Convergência

- ▶ **Número de Iterações** ⇒ Medida usualmente adotada para a determinação da **rapidez de convergência** de um método
- ▶ Não deve ser uma medida **conclusiva** sobre o tempo de execução do programa
- ▶ **Tempo gasto** na execução de uma iteração ⇒ **Variável** de método para método

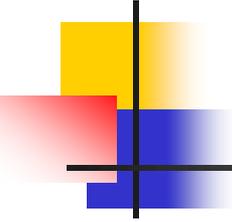


Análise Comparativa dos Métodos

■ Esforço Computacional

▶ Indicadores

- Número de **operações** efetuadas a cada iteração;
- **Complexidade** das operações;
- Número de **decisões** lógicas;
- Número de **avaliações** de função a cada iteração; e
- Número total de **iterações**.

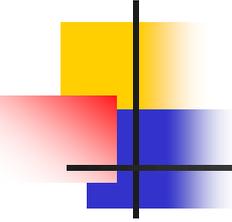


Análise Comparativa dos Métodos

■ Esforço Computacional

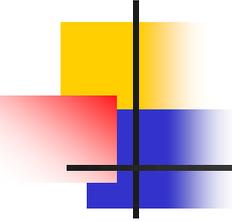
▶ Conclusões gerais sobre a eficiência computacional de um método.

- ***Bisseccção*** ⇒ Cálculos mais **simples** por iteração
- ***Newton*** ⇒ Cálculos mais **elaborados**
- Número de iterações da ***Bisseccção*** é, na grande maioria das vezes, ***muito maior*** do que o número de iterações efetuadas por ***Newton***



Análise Comparativa dos Métodos

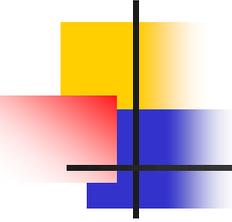
- **Condições a Serem Satisfeitas pelo Método Ideal**
 - ▶ **Convergência assegurada**
 - ▶ **Ordem de convergência alta**
 - ▶ **Cálculos por iteração simples**



Análise Comparativa dos Métodos

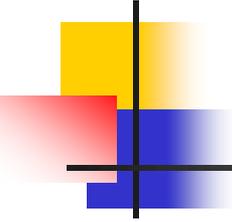
■ Escolha do Melhor Método

- ▶ ***Newton-Raphson*** ⇒ Caso seja fácil a verificação das condições de convergência e o cálculo de $f'(x)$
- ▶ ***Secante*** ⇒ Caso seja trabalhoso obter e/ou avaliar $f'(x)$, uma vez que não é necessária a obtenção de $f'(x)$



Análise Comparativa dos Métodos

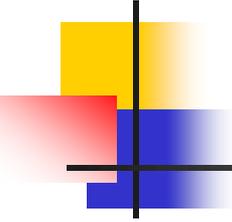
- Critério de Parada \Rightarrow Detalhe **importante** na escolha do método
 - ▶ Se o objetivo for a **redução** do intervalo que contém a raiz \Rightarrow ***Bisseccção*** ou ***Falsa Posição Modificado*** (**não** usar o Método da ***Falsa Posição***)
 - ▶ Se a escolha parte de um **valor inicial** para a raiz \Rightarrow ***Newton-Raphson*** ou da ***Secante*** (pois trabalham com aproximações x_k para a raiz exata)



Análise Comparativa dos Métodos

■ Observações Importantes

- ▶ Situações nas quais se deve evitar o uso do Método de *Newton-Raphson* e da *Secante*
 - Tendência da curva ao **paralelismo** a qualquer um dos eixos
 - Tendência da função à **tangência** ao eixo das abscissas em um ou mais pontos.



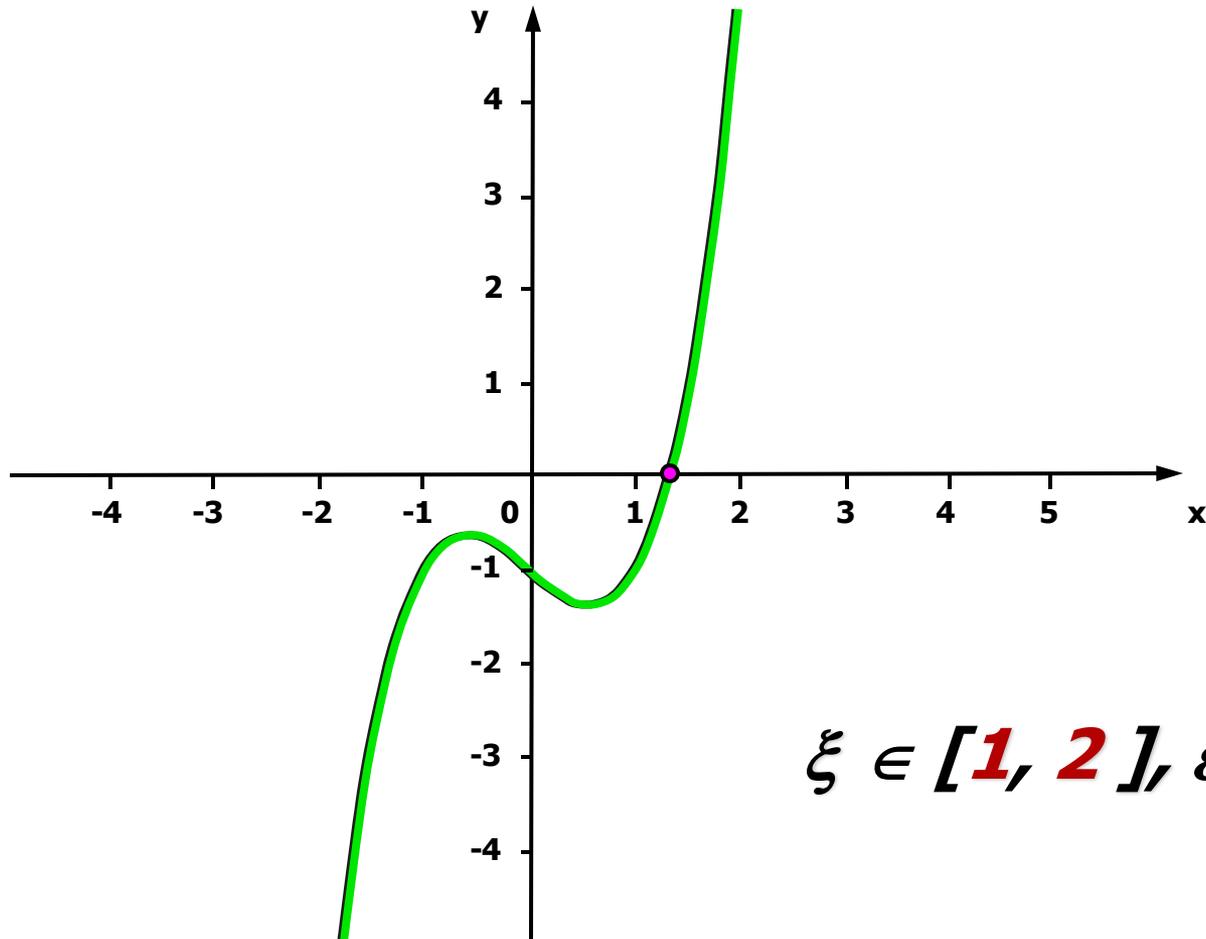
Análise Comparativa dos Métodos

■ Conclusão

- ▶ Escolha do método \Rightarrow Diretamente relacionada com a **equação** cuja solução é desejada
 - Comportamento da função na região da raiz exata
 - Dificuldades com o cálculo de $f'(x)$
 - Critério de parada, etc.

Análise Comparativa dos Métodos

- Exemplo 01: $f(x) = x^3 - x - 1$



$$\xi \in [1, 2], \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-6}$$

Análise Comparativa dos Métodos

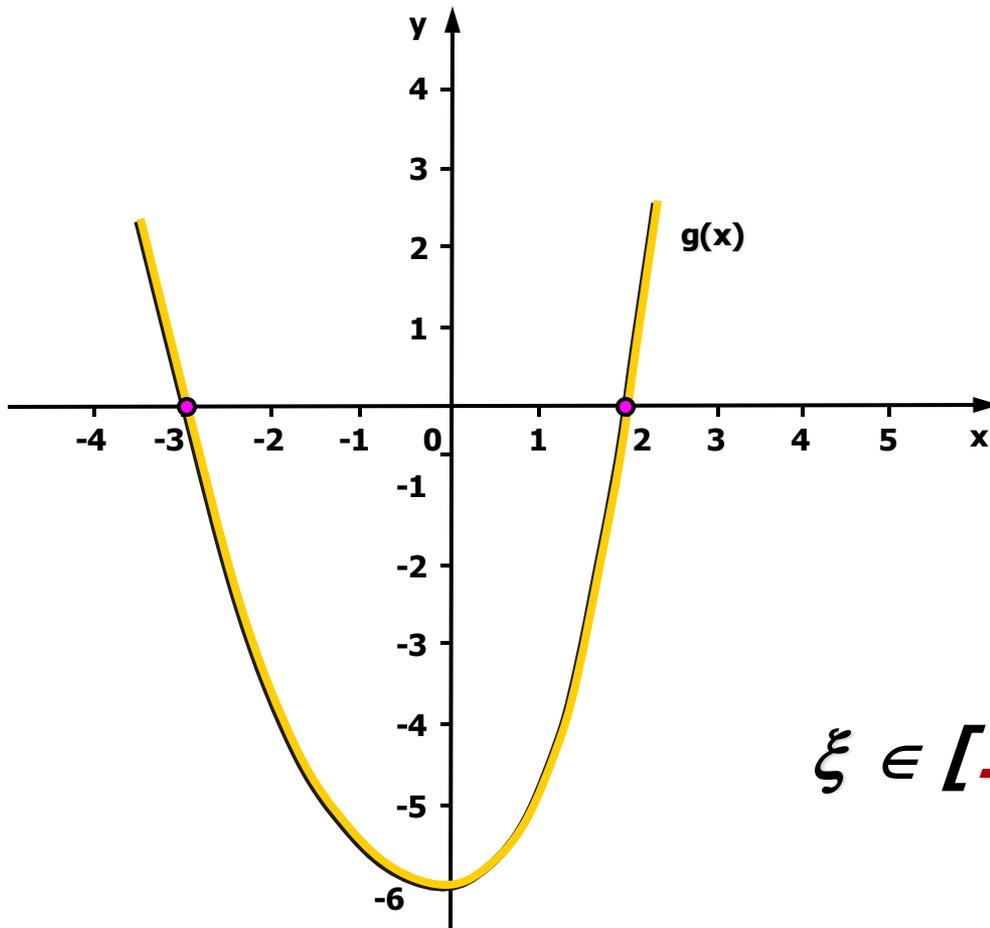
■ Exemplo 01:

	Dados iniciais	x	f(x)	Erro em x	# de iterações
Bisseccção	[1,2]	1,324718	$2,209495 \times 10^{-6}$	$2,879637 \times 10^{-6}$	18
Falsa Posição	[1,2]	1,324715	$-1,087390 \times 10^{-5}$	$2,614434 \times 10^{-6}$	34
FPM	[1,2]	1,324718	$-1,186057 \times 10^{-6}$	$1,598683 \times 10^{-4}$	4
• Ponto Fixo	$x_0 = 1$	1,324718	$2,493994 \times 10^{-6}$	$1,882665 \times 10^{-6}$	9
Newton	$x_0 = 0$	1,324718	$2,746469 \times 10^{-12}$	$6,275822 \times 10^{-7}$	21
Secante	$x_0 = 0,2$ $x_1 = 0,5$	1,324718	$1,417347 \times 10^{-9}$	$1,221868 \times 10^{-6}$	8

• $\varphi(x) = (x+1)^{1/3}$

Análise Comparativa dos Métodos

■ Exemplo 02: $x^2 + x - 6 = 0$



$$\xi \in [1, 3], \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-6}$$

Análise Comparativa dos Métodos

■ Exemplo 02:

	Dados iniciais	x	f(x)	Erro em x	# de iterações
Bisseccção	[1;2,5]	2,000000	$2,384186 \times 10^{-6}$	$7,152561 \times 10^{-7}$	20
Falsa Posição	[1;2,5]	2,000000	$-2,479001 \times 10^{-6}$	$8,548295 \times 10^{-8}$	42
FPM	[1;2,5]	2,000000	$-2,397253 \times 10^{-6}$	$2,450482 \times 10^{-7}$	18
• Ponto Fixo	$x_0 = 1$	2,000000	$1,139381 \times 10^{-6}$	$5,696906 \times 10^{-7}$	11
Newton	$x_0 = 1$	2,000000	$5,820766 \times 10^{-9}$	$5,820766 \times 10^{-10}$	4
Secante	$x_0 = 1,0$ $x_1 = 1,2$	2,000000	$-4,230246 \times 10^{-8}$	$9,798250 \times 10^{-6}$	5

• $\varphi(x) = (6 - x)^{1/2}$