

ITC: Introdução à Teoria da Computação

Marcos Castilho

DInf/UFPR

15 de junho de 2021

Forma normal de Chomsky

Definição:

Uma Gramática Livre de Contexto $G = (V, \Sigma, P, S)$ está em *Forma Normal de Chomsky* se cada regra em P tem uma das seguintes formas:

(i) $A \rightarrow BC$

(ii) $A \rightarrow a$

(iii) $S \rightarrow \lambda$

Onde $B, C \in V - \{S\}$.

Teorema

Seja $G = (V, \Sigma, P, S)$ uma gramática livre de contexto. Existe um algoritmo para construir uma GLC $G' = (V', \Sigma, P', S')$ em forma normal de Chomsky tal que $L(G_T) = L(G)$.

Prova

Assumimos, sem perda de generalidade, que:

- (i) S não é recursiva
- (ii) $A \rightarrow \lambda$ se, e somente se, $A = S$
- (iii) G não contém regras de cadeia
- (iv) G não contém símbolos inúteis

Prova, continuação

Logo, as regras de G têm apenas as seguintes formas:

- ▶ $S \rightarrow \lambda$
- ▶ $A \rightarrow a$
- ▶ $A \rightarrow w$, onde $w \in ((V \cup \Sigma) - \{S\})^*$, $|w| > 1$.

Construímos P' assim:

- ▶ As regras cujo lado direito têm tamanho zero são: $S \rightarrow \lambda$
- ▶ As regras cujo lado direito têm tamanho um são: $A \rightarrow a$, pois G não contém regras de cadeia.

Todas estas regras de G são adicionadas em G' .

Prova, continuação

Seja $A \rightarrow w$ uma regra tal que $|w| > 1$. Então
 $w \in (V \cup \Sigma)(V \cup \Sigma)(V \cup \Sigma)^*$

Temos que transformar estas regras de maneira que elas não tenham terminais e sejam limitadas à exatamente duas variáveis no lado direito.

Prova, continuação

Removendo os terminais:

Basta adicionar novas variáveis para cada terminal destas regras.

Exemplo:

$$G : \{ A \rightarrow bDcF \} \quad \Rightarrow \quad G' : \begin{cases} A \rightarrow B'DC'F \\ B' \rightarrow b \\ C' \rightarrow c \end{cases}$$

Exemplo

Agora nos resta substituir as regras $A \rightarrow w$ nos casos em que w é constituído apenas de variáveis (duas ou mais) por regras com exatamente duas variáveis no lado direito.

Isto é feito pela quebra das regras usando-se novas variáveis.
Exemplo:

$$G : \{ A \rightarrow B'DC'F \} \Rightarrow G' : \left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow B'T_1 \\ T_1 \rightarrow DT_2 \\ T_2 \rightarrow C'F \end{array} \right.$$

Exemplo

$$G : \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aABC \mid a \\ A \rightarrow aA \mid a \\ B \rightarrow bcB \mid bc \\ C \rightarrow cC \mid c \end{array} \right.$$

Estas regras satisfazem
as condições do teorema.

$$G' : \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow A'T_1 \mid a \\ A' \rightarrow a \\ T_1 \rightarrow AT_2 \\ T_2 \rightarrow BC \\ A \rightarrow A'A \mid a \\ B \rightarrow B'T_3 \mid B'C' \\ B' \rightarrow b \\ T_3 \rightarrow C'B \\ C' \rightarrow c \\ C \rightarrow C'C \mid c \end{array} \right.$$

Exemplo 2

Uma gramática para as expressões aditivas (AE) de expressões aritméticas com um terminal b , o operador $+$ e parênteses.

Exemplos: $b, (b), (b + b), (b) + b, \dots$

$AE = (V, \Sigma, P, S)$, onde: $V = \{S, A, T\}$ e $\Sigma = \{b, +, (,)\}$

$$P : \begin{cases} S \rightarrow A \\ A \rightarrow T \\ A \rightarrow A + T \\ T \rightarrow b \\ T \rightarrow (A) \end{cases}$$

A primeira tarefa é eliminar as regras de cadeia.

Exemplo 2, continuação

Eliminando as regras de cadeia:

$$P : \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow A \\ A \rightarrow T \\ A \rightarrow A + T \\ T \rightarrow b \\ T \rightarrow (A) \end{array} \right. \quad P' : \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow A + T \mid b \mid (A) \\ A \rightarrow A + T \mid b \mid (A) \\ T \rightarrow b \mid (A) \end{array} \right.$$

Exemplo 2, continuação

Colocando em forma normal de Chomsky:

$$P' : \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow A + T \mid b \mid (A) \\ A \rightarrow A + T \mid b \mid (A) \\ T \rightarrow b \mid (A) \end{array} \right. \quad P'' : \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow AY \mid b \mid LZ \\ Y \rightarrow PT \\ P \rightarrow + \\ L \rightarrow (\\ Z \rightarrow AR \\ R \rightarrow) \\ A \rightarrow AY \mid b \mid LZ \\ T \rightarrow b \mid LZ \end{array} \right.$$

Removendo a recursividade direta à esquerda

Motivação: Evitar laços infinitos nas análises sintáticas por causa de regras do tipo $A \rightarrow Aa$.

Exemplo: ba^*

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow Aa \mid b \\ Z \rightarrow aZ \mid a \end{array} \right.$$

Exemplo 2: $(b + c)(a + b)^*$

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow Aa \mid Ab \mid b \mid c \\ Z \rightarrow aZ \mid bZ \mid a \mid b \end{array} \right.$$

Exemplo 3: $(b + c)^*a(b + c)^*$

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow AB \mid BA \mid a \\ B \rightarrow b \mid c \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow BAZ \mid aZ \mid BA \mid a \\ Z \rightarrow BZ \mid B \\ B \rightarrow b \mid c \end{array} \right.$$

Generalizando

Para remover recursão direta à esquerda, as regras A são divididas em dois tipos:

- ▶ $A \rightarrow Au_1 \mid Au_2 \mid \dots \mid Au_j$, e
- ▶ $A \rightarrow v_1 \mid v_2 \mid \dots \mid v_k$

Onde o primeiro símbolo em $v_i \neq A$.

A ideia é derivar recursivamente uma palavra e terminar com v_i .

Nova ideia

Primeiro, gerar v_i e depois produzir o resto da palavra com recursão à direita:

- ▶ $A \rightarrow v_1 \mid \dots \mid v_k \mid v_1 Z \mid \dots \mid v_k Z$
- ▶ $Z \rightarrow u_1 Z \mid \dots \mid u_j Z \mid u_1 \mid \dots \mid u_j$

Exemplo 4: $(b + bb)(a + ab)^*$

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow Aa \mid Aab \mid bb \mid b \\ Z \rightarrow aZ \mid abZ \mid a \mid ab \end{array} \right.$$

Lema

Seja $G = (V, \Sigma, P, S)$ uma GLC e $A \in V$ uma variável em G que é diretamente recursiva à esquerda. Existe um algoritmo para construir $G' = (V', \Sigma, P', S')$ tal que $L(G') = L(G)$ na qual A não é diretamente recursiva à esquerda.

Prova

Suponha que S não seja recursiva e que $S \rightarrow \lambda$ é a única regra- λ ; e também que P não contém $A \rightarrow A$.

Prova, continuação

Construímos $V' = V \cup X$, onde X contém variável adicional para gerar a recursão à esquerda.

P' é obtido de P pela técnica acima.

As novas regras A não são recursivas diretas, pois o primeiro símbolo de v_i não é A .

As regras Z também não são, pois Z não ocorre em u_i e os u_i 's são diferentes de λ , pela restrição nas regras A .

Problema

O problema agora é a recursividade indireta à esquerda.

Isto será tratado pelo uso de outra forma normal, a Forma Normal de Greibach.

Lema 1

Seja $G = (V, \Sigma, P, S)$ uma GLC e $A \in V$ uma variável em G que é diretamente recursiva à esquerda. Existe um algoritmo para construir $G' = (V', \Sigma, P', S')$ tal que $L(G') = L(G)$ na qual A não é diretamente recursiva à esquerda.

Prova

Foi demonstrado no final da aula anterior.

Lema 2

Seja $G = (V, \Sigma, P, S)$ uma gramática livre de contexto.

Seja $A \rightarrow uBv$ uma regra em P .

Sejam as regras B de P com a forma: $B \rightarrow w_1 \mid w_2 \mid \dots \mid w_n$.

Assim, $G' = (V, \Sigma, P', S)$, é equivalente à G , onde

$$P' = (P - \{A \rightarrow uBv\}) \cup \{A \rightarrow uw_1v \mid \dots \mid uw_nv\}.$$

Prova

Cada regra $A \rightarrow uw;v$ é derivável em G . Assim, $L(G') = L(G)$.
Por outro lado, seja $w \in L(G)$ onde a regra $A \rightarrow uBv$ foi usada na derivação. Temos que mostrar que $w \in L(G')$.

De fato, se $w \in L(G)$ então

$$S \xRightarrow{*}_G pAq \xRightarrow{G} puBv \xRightarrow{G} puw;vq \xRightarrow{*}_G w.$$

Mas em G' :

$$S \xRightarrow{*}_{G'} pAq \xRightarrow{G'} puw;vq \xRightarrow{*}_{G'} w.$$

Forma normal de Greibach

Definição:

Uma Gramática Livre de Contexto $G = (V, \Sigma, P, S)$ está em *Forma Normal de Greibach* (FNG) se cada regra em P tem uma das seguintes formas:

- (i) $S \rightarrow \lambda$, se $\lambda \in L(G)$;
- (ii) $A \rightarrow aw$, para $a \in \Sigma$ e $w \in V^*$.

Teorema

Seja $G = (V, \Sigma, P, S)$ uma gramática livre de contexto. Existe uma gramática na forma normal de Greibach que é equivalente à G .

Prova

Sabemos que é possível obter uma GLC equivalente à G tal que:

- (i) $S \rightarrow \lambda$, se $\lambda \in L(G)$;
- (ii) $A \rightarrow a$, para $a \in \Sigma$;
- (iii) $A \rightarrow w$, para $|w| \geq 2$.

Prova, continuação

Podemos usar a técnica usada na prova da existência de uma gramática na forma normal de Chomsky, substituindo por variáveis todos os terminais de w a partir do seu segundo símbolo nas regras da forma $A \rightarrow w$ para $|w| \geq 2$.

Obteremos regras da forma:

$$A \rightarrow Xy$$

Para $X \in V \cup \Sigma$ e $y \in V^+$.

Basta agora mostrar como substituir estas regras por outras que estão na FNG de maneira que a gramática resultante seja equivalente à G .

Prova, continuação

Basta usar repetidas vezes os lemas 1 e 2 acima. O primeiro, para substituir as regras Y diretamente recursivas e o segundo para substituir Y nos casos em que ele não é um terminal.

Para que haja garantia de que o processo termine devemos ordenar as variáveis sequencialmente.

Qualquer ordenação basta em teoria, o efeito prático é apenas na complexidade da gramática resultante. O melhor é iniciar a partir da ordenação 1 para S .

Prova, continuação

Agora, para cada variável $A \in V$, começando com S , na ordem dada pela ordenação acima, faz-se o seguinte até não poder mais, nesta ordem:

- (i) Se existe uma regra $A \rightarrow By$, para $|y| \geq 1$, tal que a ordenação de B é menor do que a de A , aplica-se o lema 2 acima para substituir B . Não se aplica esta regra no caso de novas variáveis introduzidas neste método.
- (ii) Se existe uma regra diretamente recursiva $A \rightarrow Ay$, para $|y| \geq 1$, aplica-se o lema 1 acima.

Prova, continuação

Como resultado, obtém-se uma GLC em que as regras da forma $X \rightarrow Yy$, para $|y| \geq 1$ são tais que a ordenação de X é menor que a de Y .

Após o término deste processo, sendo A a variável de maior ordem, as regras A são da forma $A \rightarrow ay$, $y \in V^*$.

Sendo B a variável com ordenação imediatamente anterior à de A , as regras B são da forma $B \rightarrow Cy$, em que $C \in V$ são tais que $C = A$.

Logo, basta aplicar o lema 2 acima para se obter as regras na forma pretendida.

Prova, continuação

Este processo é aplicado repetidas vezes para as variáveis de ordem menor até atingirmos S . Ao final, para cada $A \in V$, tem-se apenas regras A na forma pretendida e eventualmente regras na forma $Z \rightarrow w$, em que Z é uma variável nova criada para se eliminar recursividade direta à esquerda.

Neste último caso, as regras da forma $Z \rightarrow Ay$ podem ser eliminadas aplicando-se novamente o lema 2 acima.

Finalmente, após este processo, todas as regras estarão no formato permitido pela FNG.

Exemplo: $G = (\{A, B, C, D\}, \{b, c, d\}, P, A)$

$$R : \left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow CB \\ B \rightarrow BBD \mid b \\ C \rightarrow BBC \mid Dc \\ D \rightarrow AD \mid d \end{array} \right.$$

- Primeiro, fazemos os lados direitos só terem variáveis ($C \rightarrow Dc$);

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow CB \\ B \rightarrow BBD \mid b \\ C \rightarrow BBC \mid DE \quad * \\ D \rightarrow AD \mid d \\ E \rightarrow c \quad \quad \quad * \end{array} \right.$$

Exemplo, continuação

- Seja a ordenação seguinte: $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$, $D = 4$.
 $E = 5$.

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow CB \\ B \rightarrow BBD \mid b \\ C \rightarrow BBC \mid DE \\ D \rightarrow AD \mid d \\ E \rightarrow c \end{array} \right.$$

Exemplo, continuação

- ▶ Começando com A , procura-se regras com lado direito tendo ordenação menor do que lado esquerdo;
- ▶ A regra A está OK;
- ▶ A regra B tem recursividade à esquerda, aplica-se o lema 1.

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow CB \\ B \rightarrow BBD \mid b \\ C \rightarrow BBC \mid DE \\ D \rightarrow AD \mid d \\ E \rightarrow c \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow CB \\ B \rightarrow b \mid bZ_1 \quad * \\ C \rightarrow BBC \mid DE \\ D \rightarrow AD \mid d \\ E \rightarrow c \\ Z_1 \rightarrow BD \mid BDZ_1 \quad * \end{array} \right.$$

Exemplo, continuação

- ▶ Passando para as regras C , a regra $C \rightarrow DE$ está OK, mas
- ▶ $C \rightarrow BBC$: a ordenação de B é menor do que a de C , então aplica-se o lema 2;

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow CB \\ B \rightarrow b \mid bZ_1 \\ C \rightarrow BBC \mid DE \\ D \rightarrow AD \mid d \\ E \rightarrow c \\ Z_1 \rightarrow BD \mid BDZ_1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow CB \\ B \rightarrow b \mid bZ_1 \\ C \rightarrow bBC \mid bZ_1BC \quad * \\ C \rightarrow DE \\ D \rightarrow AD \mid d \\ E \rightarrow c \\ Z_1 \rightarrow BD \mid BDZ_1 \end{array} \right.$$

Exemplo, continuação

- Passando para as regras D , a regra $D \rightarrow AD$: a ordenação de A é menor do que a de D , então aplica-se o lema 2;

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow CB \\ B \rightarrow b \mid bZ_1 \\ C \rightarrow bBC \mid bZ_1BC \mid DE \\ D \rightarrow AD \mid d \\ E \rightarrow c \\ Z_1 \rightarrow BD \mid BDZ_1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow CB \\ B \rightarrow b \mid bZ_1 \\ C \rightarrow bBC \mid bZ_1BC \mid DE \\ D \rightarrow CBD \\ D \rightarrow d \\ E \rightarrow c \\ Z_1 \rightarrow BD \mid BDZ_1 \end{array} \right. *$$

Exemplo, continuação

- ▶ Esta nova regra tem erro na ordenação, pois a ordenação de C é menor do que a de D :

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow CB \\ B \rightarrow b \mid bZ_1 \\ C \rightarrow bBC \mid bZ_1BC \mid DE \\ D \rightarrow CBD \mid d \\ E \rightarrow c \\ Z_1 \rightarrow BD \mid BDZ_1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow CB \\ B \rightarrow b \mid bZ_1 \\ C \rightarrow bBC \mid bZ_1BC \mid DE \\ D \rightarrow bBCBD \mid bZ_1BCBD \mid DEBD \quad * \\ D \rightarrow d \\ E \rightarrow c \\ Z_1 \rightarrow BD \mid BDZ_1 \end{array} \right.$$

Exemplo, continuação

- Esta última modificação introduziu recursividade à esquerda em D :

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow CB \\ B \rightarrow b \mid bZ_1 \\ C \rightarrow bBC \mid bZ_1BC \mid DE \\ D \rightarrow bBCBD \mid bZ_1BCBD \mid d \\ D \rightarrow DEBD \\ E \rightarrow c \\ Z_1 \rightarrow BD \mid BDZ_1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow CB \\ B \rightarrow b \mid bZ_1 \\ C \rightarrow bBC \mid bZ_1BC \mid DE \\ D \rightarrow bBCBD \mid bZ_1BCBD \mid d \\ D \rightarrow bBCBDZ_2 \mid bZ_1BCBDZ_2 \mid dZ_2 \quad * \\ E \rightarrow c \\ Z_1 \rightarrow BD \mid BDZ_1 \\ Z_2 \rightarrow EBD \mid EBDZ_2 \quad * \end{array} \right.$$

Exemplo, continuação

- A primeira fase terminou. Agora analisamos na ordem inversa procurando regras fora do padrão FNG, mas apenas nas variáveis que não são Z_i , isto é, apenas as regras $A \rightarrow CB$ e $C \rightarrow DE$. Primeiro a regra C :

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow CB \\ B \rightarrow b \mid bZ_1 \\ C \rightarrow bBC \mid bZ_1BC \\ C \rightarrow DE \\ D \rightarrow bBCBD \mid bZ_1BCBD \mid d \\ D \rightarrow bBCBDZ_2 \mid bZ_1BCBDZ_2 \mid dZ_2 \\ E \rightarrow c \\ Z_1 \rightarrow BD \mid BDZ_1 \\ Z_2 \rightarrow EBD \mid EBDZ_2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow CB \\ B \rightarrow b \mid bZ_1 \\ C \rightarrow bBC \mid bZ_1BC \\ C \rightarrow bBCBDE \mid bZ_1BCBDE \mid dE \quad * \\ C \rightarrow bBCBDZ_2E \mid bZ_1BCBDZ_2E \mid dZ_2E \quad * \\ D \rightarrow bBCBD \mid bZ_1BCBD \mid d \\ D \rightarrow bBCBDZ_2 \mid bZ_1BCBDZ_2 \mid dZ_2 \\ E \rightarrow c \\ Z_1 \rightarrow BD \mid BDZ_1 \\ Z_2 \rightarrow EBD \mid EBDZ_2 \end{array} \right.$$

Exemplo, continuação

► Agora a regra A:

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow CB \\ B \rightarrow b \mid bZ_1 \\ C \rightarrow bBC \mid bZ_1BC \\ C \rightarrow bBCBDE \mid bZ_1BCBDE \mid dE \\ C \rightarrow bBCBDZ_2E \mid bZ_1BCBDZ_2E \mid dZ_2E \\ D \rightarrow bBCBD \mid bZ_1BCBD \mid d \\ D \rightarrow bBCBDZ_2 \mid bZ_1BCBDZ_2 \mid dZ_2 \\ E \rightarrow c \\ Z_1 \rightarrow BD \mid BDZ_1 \\ Z_2 \rightarrow EBD \mid EBDZ_2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow bBCB \mid bZ_1BCB \\ A \rightarrow bBCBDEB \mid bZ_1BCBDEB \mid dEB \\ A \rightarrow bBCBDZ_2EB \mid bZ_1BCBDZ_2EB \mid dZ_2EB \\ B \rightarrow b \mid bZ_1 \\ C \rightarrow bBC \mid bZ_1BC \\ C \rightarrow bBCBDE \mid bZ_1BCBDE \mid dE \\ C \rightarrow bBCBDZ_2E \mid bZ_1BCBDZ_2E \mid dZ_2E \\ D \rightarrow bBCBD \mid bZ_1BCBD \mid d \\ D \rightarrow bBCBDZ_2 \mid bZ_1BCBDZ_2 \mid dZ_2 \\ E \rightarrow c \\ Z_1 \rightarrow BD \mid BDZ_1 \\ Z_2 \rightarrow EBD \mid EBDZ_2 \end{array} \right. \begin{array}{l} * \\ * \\ * \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Exemplo, continuação

► Para terminar, restam as regras Z_i :

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow bBCB \mid bZ_1BCB \\ A \rightarrow bBCBDEB \mid bZ_1BCBDEB \mid dEB \\ A \rightarrow bBCBDZ_2EB \mid bZ_1BCBDZ_2EB \mid dZ_2EB \\ B \rightarrow b \mid bZ_1 \\ C \rightarrow bBC \mid bZ_1BC \\ C \rightarrow bBCBDE \mid bZ_1BCBDE \mid dE \\ C \rightarrow bBCBDZ_2E \mid bZ_1BCBDZ_2E \mid dZ_2E \\ D \rightarrow bBCBD \mid bZ_1BCBD \mid d \\ D \rightarrow bBCBDZ_2 \mid bZ_1BCBDZ_2 \mid dZ_2 \\ E \rightarrow c \\ Z_1 \rightarrow BD \mid BDZ_1 \\ Z_2 \rightarrow EBD \mid EBDZ_2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow bBCB \mid bZ_1BCB \\ A \rightarrow bBCBDEB \mid bZ_1BCBDEB \mid dEB \\ A \rightarrow bBCBDZ_2EB \mid bZ_1BCBDZ_2EB \mid dZ_2EB \\ B \rightarrow b \mid bZ_1 \\ C \rightarrow bBC \mid bZ_1BC \\ C \rightarrow bBCBDE \mid bZ_1BCBDE \mid dE \\ C \rightarrow bBCBDZ_2E \mid bZ_1BCBDZ_2E \mid dZ_2E \\ D \rightarrow bBCBD \mid bZ_1BCBD \mid d \\ D \rightarrow bBCBDZ_2 \mid bZ_1BCBDZ_2 \mid dZ_2 \\ E \rightarrow c \\ Z_1 \rightarrow bD \mid bZ_1D \mid bDZ_1 \mid bZ_1DZ_1 \\ Z_2 \rightarrow cBD \mid cBDZ_2 \end{array} \right. \begin{array}{l} * \\ * \end{array}$$

Exemplo 2: $G = (\{A, B, C, D\}, \{a, b, c\}, P, A)$

$$P : \begin{cases} A \rightarrow BC & | \lambda \\ B \rightarrow BC & | DC & | a \\ C \rightarrow BC & | b \\ D \rightarrow BD & | c \end{cases}$$

- ▶ Como já está em FNC, basta iniciar com a atribuição de ordem às variáveis;
- ▶ Seja $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$ e $D = 4$.

Exemplo, continuação

- ▶ A regra A está OK;
- ▶ Mas a regra $B \rightarrow BC$ tem recursividade à esquerda.

$$P : \left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow BC \mid \lambda \\ B \rightarrow DC \mid a \\ B \rightarrow BC \\ C \rightarrow BC \mid b \\ D \rightarrow BD \mid c \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow BC \mid \lambda \\ B \rightarrow DC \mid a \\ B \rightarrow DCZ_1 \mid aZ_1 \quad * \\ C \rightarrow BC \mid b \\ D \rightarrow BD \mid c \\ Z_1 \rightarrow C \mid CZ_1 \quad * \end{array} \right.$$

Exemplo, continuação

- A regra $C \rightarrow BC$ está com ordenação incorreta:

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow BC \mid \lambda \\ B \rightarrow DC \mid a \mid DCZ_1 \mid aZ_1 \\ C \rightarrow b \\ C \rightarrow BC \\ D \rightarrow BD \mid c \\ Z_1 \rightarrow C \mid CZ_1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow BC \mid \lambda \\ B \rightarrow DC \mid a \mid DCZ_1 \mid aZ_1 \\ C \rightarrow b \\ C \rightarrow DCC \mid aC \mid DCZ_1C \mid aZ_1C \quad * \\ D \rightarrow BD \mid c \\ Z_1 \rightarrow C \mid CZ_1 \end{array} \right.$$

Exemplo, continuação

- A regra $D \rightarrow BD$ está com ordenação incorreta:

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow BC \mid \lambda \\ B \rightarrow DC \mid a \mid DCZ_1 \mid aZ_1 \\ C \rightarrow b \\ C \rightarrow DCC \mid aC \mid DCZ_1C \mid aZ_1C \\ D \rightarrow BD \mid c \\ Z_1 \rightarrow C \mid CZ_1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow BC \mid \lambda \\ B \rightarrow DC \mid a \mid DCZ_1 \mid aZ_1 \\ C \rightarrow b \mid DCC \mid aC \mid DCZ_1C \mid aZ_1C \\ D \rightarrow DCD \mid aD \mid DCZ_1D \mid aZ_1D \mid c \\ Z_1 \rightarrow C \mid CZ_1 \end{array} \right. \quad *$$

Exemplo, continuação

- Agora surgiu recursividade à esquerda em duas regras D :

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow BC \mid \lambda \\ B \rightarrow DC \mid a \mid DCZ_1 \mid aZ_1 \\ C \rightarrow b \mid DCC \mid aC \mid DCZ_1C \mid aZ_1C \\ D \rightarrow aD \mid aZ_1D \mid c \\ D \rightarrow DCD \mid DCZ_1D \\ Z_1 \rightarrow C \mid CZ_1 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow BC \mid \lambda \\ B \rightarrow DC \mid a \mid DCZ_1 \mid aZ_1 \\ C \rightarrow b \mid DCC \mid aC \mid DCZ_1C \mid aZ_1C \\ D \rightarrow aD \mid aZ_1D \mid c \\ D \rightarrow aDZ_2 \mid aZ_1DZ_2 \mid cZ_2 \quad * \\ Z_1 \rightarrow C \mid CZ_1 \\ Z_2 \rightarrow CD \mid CZ_1D \mid CDZ_2 \mid CZ_1DZ_2 \quad * \end{array} \right.$$

Exemplo, continuação

- Colocando terminais no início, na ordem contrária da ordenação, iniciando com C , pois D já está pronto:

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow BC \mid \lambda \\ B \rightarrow DC \mid a \mid DCZ_1 \mid aZ_1 \\ C \rightarrow b \mid aC \mid aZ_1C \\ C \rightarrow DCC \mid DCZ_1C \\ D \rightarrow aD \mid aZ_1D \mid c \\ D \rightarrow aDZ_2 \mid aZ_1DZ_2 \mid cZ_2 \\ Z_1 \rightarrow C \mid CZ_1 \\ Z_2 \rightarrow CD \mid CZ_1D \mid CDZ_2 \mid CZ_1DZ_2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow BC \mid \lambda \\ B \rightarrow DC \mid a \mid DCZ_1 \mid aZ_1 \\ C \rightarrow b \mid aC \mid aZ_1C \\ C \rightarrow aDCC \mid aZ_1DCC \mid cCC \\ C \rightarrow aDZ_2CC \mid aZ_1DZ_2CC \mid cZ_2CC \\ C \rightarrow aDCZ_1C \mid aZ_1DCZ_1C \mid cCZ_1C \\ C \rightarrow aDZ_2CZ_1C \mid aZ_1DZ_2CZ_1C \mid cZ_2CZ_1C \\ D \rightarrow aD \mid aZ_1D \mid c \\ D \rightarrow aDZ_2 \mid aZ_1DZ_2 \mid cZ_2 \\ Z_1 \rightarrow C \mid CZ_1 \\ Z_2 \rightarrow CD \mid CZ_1D \mid CDZ_2 \mid CZ_1DZ_2 \end{array} \right. \begin{array}{l} \\ \\ \\ * \\ * \\ * \\ * \\ \\ \\ \end{array}$$

Exemplo, continuação

► Agora as regras B :

{	$A \rightarrow BC \mid \lambda$
	$B \rightarrow DC \mid a \mid DCZ_1 \mid aZ_1$
	$C \rightarrow b \mid aC \mid aZ_1C$
	$C \rightarrow aDCC \mid aZ_1DCC \mid cCC$
	$C \rightarrow aDZ_2CC \mid aZ_1DZ_2CC \mid cZ_2CC$
	$C \rightarrow aDCZ_1C \mid aZ_1DCZ_1C \mid cCZ_1C$
	$C \rightarrow aDZ_2CZ_1C \mid aZ_1DZ_2CZ_1C \mid cZ_2CZ_1C$
	$D \rightarrow aD \mid aZ_1D \mid c$
	$D \rightarrow aDZ_2 \mid aZ_1DZ_2 \mid cZ_2$
	$Z_1 \rightarrow C \mid CZ_1$
	$Z_2 \rightarrow CD \mid CZ_1D \mid CDZ_2 \mid CZ_1DZ_2$

}	$A \rightarrow BC \mid \lambda$	
	$B \rightarrow a \mid aZ_1$	
	$B \rightarrow aDC \mid aZ_1DC \mid cC$	*
	$B \rightarrow aDZ_2C \mid aZ_1DZ_2C \mid cZ_2C$	*
	$B \rightarrow aDCZ_1 \mid aZ_1DCZ_1 \mid cCZ_1$	*
	$B \rightarrow aDZ_2CZ_1 \mid aZ_1DZ_2CZ_1 \mid cZ_2CZ_1$	*
	$C \rightarrow b \mid aC \mid aZ_1C$	
	$C \rightarrow aDCC \mid aZ_1DCC \mid cCC$	
	$C \rightarrow aDZ_2CC \mid aZ_1DZ_2CC \mid cZ_2CC$	
	$C \rightarrow aDCZ_1C \mid aZ_1DCZ_1C \mid cCZ_1C$	
	$C \rightarrow aDZ_2CZ_1C \mid aZ_1DZ_2CZ_1C \mid cZ_2CZ_1C$	
	$D \rightarrow aD \mid aZ_1D \mid c$	
$D \rightarrow aDZ_2 \mid aZ_1DZ_2 \mid cZ_2$		
$Z_1 \rightarrow C \mid CZ_1$		
$Z_2 \rightarrow CD \mid CZ_1D \mid CDZ_2 \mid CZ_1DZ_2$		

Exemplo, continuação

► Agora as regras A:

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow BC \mid \lambda \\ B \rightarrow a \mid aZ_1 \\ B \rightarrow aDC \mid aZ_1DC \mid cC \\ B \rightarrow aDZ_2C \mid aZ_1DZ_2C \mid cZ_2C \\ B \rightarrow aDCZ_1 \mid aZ_1DCZ_1 \mid cCZ_1 \\ B \rightarrow aDZ_2CZ_1 \mid aZ_1DZ_2CZ_1 \mid cZ_2CZ_1 \\ C \rightarrow b \mid aC \mid aZ_1C \\ C \rightarrow aDCC \mid aZ_1DCC \mid cCC \\ C \rightarrow aDZ_2CC \mid aZ_1DZ_2CC \mid cZ_2CC \\ C \rightarrow aDCZ_1C \mid aZ_1DCZ_1C \mid cCZ_1C \\ C \rightarrow aDZ_2CZ_1C \mid aZ_1DZ_2CZ_1C \mid cZ_2CZ_1C \\ D \rightarrow aD \mid aZ_1D \mid c \\ D \rightarrow aDZ_2 \mid aZ_1DZ_2 \mid cZ_2 \\ Z_1 \rightarrow C \mid CZ_1 \\ Z_2 \rightarrow CD \mid CZ_1D \mid CDZ_2 \mid CZ_1DZ_2 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l}
 A \rightarrow \lambda \\
 A \rightarrow aC \mid aZ_1C \\
 A \rightarrow aDCC \mid aZ_1DCC \mid cCC \\
 A \rightarrow aDZ_2CC \mid aZ_1DZ_2CC \mid cZ_2CC \\
 A \rightarrow aDCZ_1C \mid aZ_1DCZ_1C \mid cCZ_1C \\
 A \rightarrow aDZ_2CZ_1C \mid aZ_1DZ_2CZ_1C \mid cZ_2CZ_1C \\
 B \rightarrow a \mid aZ_1 \\
 B \rightarrow aDC \mid aZ_1DC \mid cC \\
 B \rightarrow aDZ_2C \mid aZ_1DZ_2C \mid cZ_2C \\
 B \rightarrow aDCZ_1 \mid aZ_1DCZ_1 \mid cCZ_1 \\
 B \rightarrow aDZ_2CZ_1 \mid aZ_1DZ_2CZ_1 \mid cZ_2CZ_1 \\
 C \rightarrow b \mid aC \mid aZ_1C \\
 C \rightarrow aDCC \mid aZ_1DCC \mid cCC \\
 C \rightarrow aDZ_2CC \mid aZ_1DZ_2CC \mid cZ_2CC \\
 C \rightarrow aDCZ_1C \mid aZ_1DCZ_1C \mid cCZ_1C \\
 C \rightarrow aDZ_2CZ_1C \mid aZ_1DZ_2CZ_1C \mid cZ_2CZ_1C \\
 D \rightarrow aD \mid aZ_1D \mid c \\
 D \rightarrow aDZ_2 \mid aZ_1DZ_2 \mid cZ_2 \\
 Z_1 \rightarrow C \mid CZ_1 \\
 Z_2 \rightarrow CD \mid CZ_1D \mid CDZ_2 \mid CZ_1DZ_2
 \end{array}$$

Exemplo, continuação

- ▶ Finalmente, restam as seis regras Z_1 e Z_2 , que devem ser tratadas para que os lados direitos iniciem com terminais.
- ▶ Basta trocar, em cada uma das seis regras, o C inicial do lado direito da regra por cada uma das quinze possibilidades, resultando em mais $6 \times 15 = 90$ regras adicionais.
- ▶ Isto fica como exercício. . .

Teorema

Seja G uma Gramática Livre de Contexto. Existe um algoritmo para construir uma gramática equivalente em Forma normal de Greibach.

Exercício

1- Simplificar, colocar em FNC e em seguida em FNG

$$\begin{cases} S \rightarrow SaB \mid aB \\ B \rightarrow bB \mid \lambda \end{cases}$$

2- Todos os exercícios do cap5 do Sudkamp, páginas 147 até 152.

Licença

- ▶ Slides feitos em $\text{\LaTeX}$ usando beamer e tikz, editados com vim.
- ▶ Licença

Creative Commons Atribuição-Uso Não-Comercial-Vedada a Criação de Obras Derivadas 2.5 Brasil License.<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/br/>

Creative Commons Atribuição-Uso Não-Comercial-Vedada a Criação de Obras Derivadas 2.5 Brasil License.<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/br/>