

ITC: Introdução à Teoria da Computação

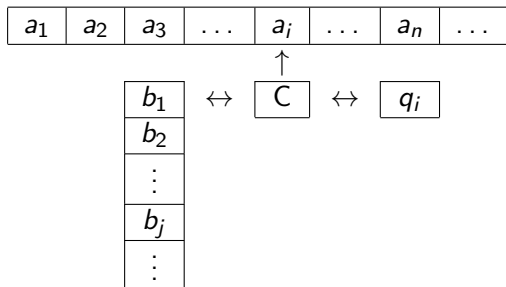
Marcos Castilho

DInf/UFPR

17 de junho de 2021

Autômatos com Pilha

- Um autômato com Pilha (AP) é, basicamente, um autômato finito com uma pilha.



Autômatos com Pilha

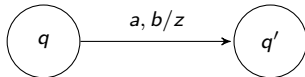
- ▶ A pilha é dividida em células, uma para cada símbolo, como na fita do AF, mas o cabeçote de leitura só tem acesso ao topo, e este é para leitura e escrita.
- ▶ Inicialmente temos:
 - ▶ Registrador no estado inicial;
 - ▶ A fita contém a palavra de entrada;
 - ▶ O cabeçote leitor está posicionado na primeira célula da fita;
 - ▶ A pilha está vazia.

Função de transição

$\delta(q, a, b) = [q', z]$, onde:

- ▶ $q, q' \in Q$;
- ▶ $a \in \Sigma \cup \{\lambda\}$;
- ▶ $b \in \Gamma \cup \{\lambda\}$;
- ▶ $z \in \Gamma^*$.

Graficamente:



- ▶ Caso $a \neq \lambda, b \neq \lambda, z \neq \lambda$: estando em q , lendo a , com topo da pilha b , mude para q' , desempilhe b e empilhe z .
- ▶ Caso $a = \lambda$: Não precisa ler a , apenas trate da pilha;
- ▶ Caso $b = \lambda$: Não consulte a pilha nem desempilhe nada;
- ▶ Caso $z = \lambda$: Não empilhe nada.

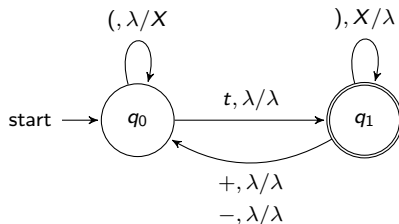
Exemplo

Seja EA o conjunto das expressões aritméticas com parênteses e com as operações $+$ e $-$:

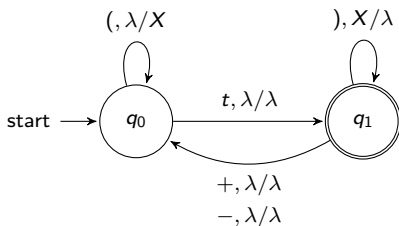
1. $t \in EA$
2. Se x e $y \in EA$, então:
 - ▶ $(x) \in EA$;
 - ▶ $x + y \in EA$;
 - ▶ $x - y \in EA$;

onde t representa uma expressão básica como um inteiro ou um real (que é reconhecido com um AFD).

O seguinte AP reconhece AE :



Exemplo, continuação



$\Sigma = \{t, (,), +, -\}$

Estado inicial: q_0

Conjunto de estados finais: $\{q_1\}$

Transições:

$\delta(q_0, (, \lambda) = [q_0, X]$

$\delta(q_0, t, \lambda) = [q_1, \lambda]$

$\delta(q_1,), X) = [q_1, \lambda]$

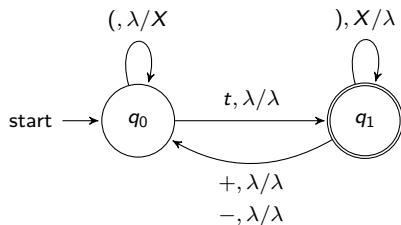
$\delta(q_1, +, \lambda) = [q_0, \lambda]$

$\delta(q_1, -, \lambda) = [q_0, \lambda]$

Convenção

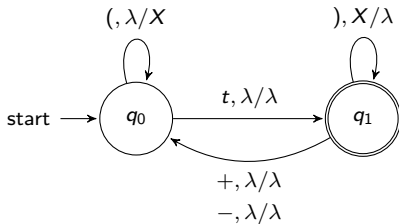
Se $x \in \Gamma^*$, então o elemento mais à esquerda de x está no topo da pilha.

Exemplo para $(t - (t + t))$



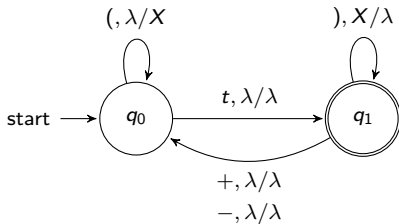
$[q_0, (t - (t + t)), \lambda] \vdash$
 $[q_0, t - (t + t)), X] \vdash$
 $[q_1, -(t + t)), X] \vdash$
 $[q_0, (t + t)), X] \vdash$
 $[q_0, t + t)), XX] \vdash$
 $[q_1, +t)), XX] \vdash$
 $[q_0, t)), XX] \vdash$
 $[q_1,)), XX] \vdash [q_1,), X] \vdash$
 $[q_1, \lambda, \lambda]$

Exemplo para t)



$$[q_0, t), \lambda] \vdash [q_1,), \lambda]$$

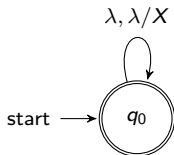
Exemplo para $(t$



$$\begin{array}{l} [q_0, (t, \lambda] \vdash [q_0, t, X] \vdash \\ [q_1, \lambda, X] \end{array}$$

Exemplo 2

Este AP não para nunca para o alfabeto $\{1\}$ e toda palavra em $\{1\}^+$:



Este exemplo de um AP que não para nunca é importante de ser lembrado.

Definição

Seja uma função de transição

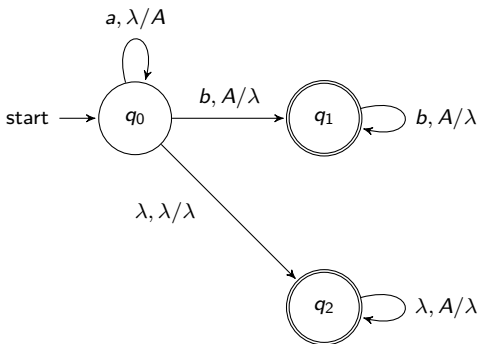
$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times (\Gamma \cup \{\lambda\}) \rightarrow Q \times \Gamma^*.$$

Duas transições $\delta(q, a, b)$ e $\delta(q, a', b')$ são compatíveis se, e somente se:

$$\begin{aligned} &(a = a' \text{ ou } a = \lambda \text{ ou } a' = \lambda) \\ &\quad \text{e} \\ &(b = b' \text{ ou } b = \lambda \text{ ou } b' = \lambda) \end{aligned}$$

Exemplo

► $L = \{a^i \mid i \geq 0\} \cup \{a^i b^i \mid i \geq 0\}$



As transições para a em q_0 introduzem não determinismo.

Definição

Um Autômato com Pilha Determinístico (APD) é uma sêxtupla $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$, onde:

- ▶ Q é um conjunto finito de estados ($Q \neq \emptyset$);
- ▶ Σ é o alfabeto de entrada (ou da fita);
- ▶ Γ é o alfabeto da pilha;
- ▶ δ é a função de transição parcial, sem transições compatíveis
 $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times (\Gamma \cup \{\lambda\}) \rightarrow Q \times \Gamma^*$;
- ▶ $q_0 \in Q$ é o estado inicial;
- ▶ $F \subseteq Q$ é o conjunto de estados finais.

Observação

Não é possível definir uma função de transição estendida $\hat{\delta}$ como foi feito no caso dos autômatos finitos, basicamente pois:

- ▶ Podem haver computações que não terminam;
- ▶ É importante saber o conteúdo da pilha, não apenas o conjunto de estados atingido.

Por isto usaremos a relação $\vdash$ para podermos definir a linguagem reconhecida por um AP.

Definição

Seja um APD $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$. A relação $\vdash \subseteq (Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*)^2$, para M é tal que

$$\forall q \in Q, a \in \Sigma \cup \{\lambda\}, y \in \Sigma^*, b \in \Gamma \cup \{\lambda\}, x, z \in \Gamma^*$$

► $[q, ay, bz] \vdash [q', y, xz]$ se, e somente se, $\delta(q, a, b) = [q', x]$.

Definição

O fecho reflexivo e transitivo de $\vdash, \vdash^*$, é definido recursivamente assim:

- a) $[q, w, z] \vdash^* [q, w, z], \forall q \in Q, w \in \Sigma^*, z \in \Gamma^*$;
- b) Se $[q, w, z] \vdash^* [q', w', z']$ e $[q', w', z'] \vdash [q'', w'', z'']$, então $[q, w, z] \vdash^* [q'', w'', z'']$.

Definição

Seja $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ um APD. A linguagem reconhecida por M é:

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid [q_0, w, \lambda] \vdash^* [q, \lambda, \lambda], q \in F\}.$$

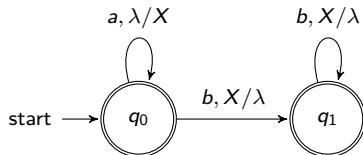
Uma palavra $w \in L(M)$ é dita ser aceita, ou reconhecida, por M .

Exemplo

Seja $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$. L é reconhecida pelo APD
 $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ onde:

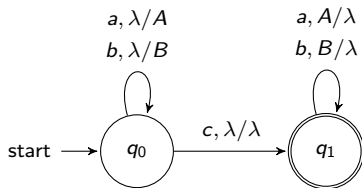
$Q = \{q_0, q_1\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{X\}$, $F = \{q_0, q_1\}$ e δ é:

- ▶ $\delta(q_0, a, \lambda) = [a, X]$
- ▶ $\delta(q_0, b, X) = [b, \lambda]$
- ▶ $\delta(q_1, b, X) = [b, \lambda]$



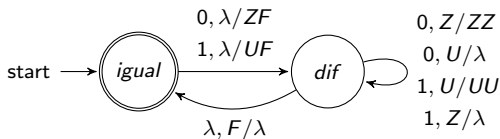
Exemplo 2

$$L = \{wcw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}.$$



Exemplo 3

$L = \{w \mid w \in \{0,1\}^* \text{ e o número de 0's em } w \text{ é igual ao número de 1's}\}.$



Exemplo 3, continuação

A ideia é que a pilha contém:

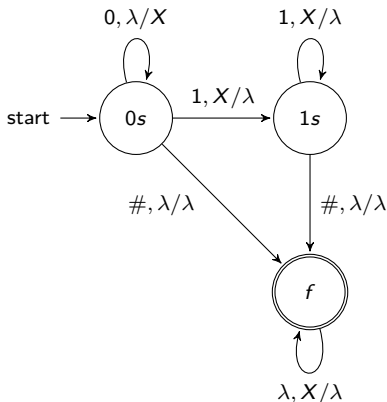
- ▶ Z^n , se x contém n 0's a mais do que 1's;
- ▶ U^n , se x contém n 1's a mais do que 0's;
- ▶ F é o “fundo” da pilha.

Obs.: Existem linguagens que podem ser reconhecidas por AP's não determinísticos mas não podem por AP's determinísticos, conforme veremos na próxima aula. Mas existem algumas que podem, desde que marquemos o final da palavra de entrada.

Exemplo 4

$$L = \{0^m 1^n \# \mid m \geq n\}$$

(o símbolo $\#$ é usado para finalizar as palavras da linguagem, pois sem ele não existe um APD.)



Exercícios

- ▶ $\{0^n 1^{2n} \mid n \geq 0\}$
- ▶ $\{0^{3n} 1^{2n} \mid n \geq 0\}$
- ▶ $\{w0w^R \mid w \in \{1, 2\}^*\}$
- ▶ $\{0^n 1^n 0^k \mid n \geq 1, k \geq 0\}$
- ▶ $\{0^m 1^n \mid m < n\}$
- ▶ $\{0^m 1^n \# \mid m \neq n\}$

Licença

- ▶ Slides feitos em $\text{\LaTeX}$ usando beamer e tikz, editados com vim.
- ▶ Licença

Creative Commons Atribuição-Uso Não-Comercial-Vedada a Criação de Obras Derivadas 2.5 Brasil License.<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/br/>

Creative Commons Atribuição-Uso Não-Comercial-Vedada a Criação de Obras Derivadas 2.5 Brasil License.<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/br/>