ITC: Introdução à Teoria da Computação

Marcos Castilho

DInf/UFPR

29 de junho de 2021

Teorema

Para qualquer gramática livre de contexto G existe um autômato com pilha que reconhece $L(G)$.

Prova

Seja $G' = (V, \Sigma, P, S)$ uma gramática livre de contexto na Forma Normal de Greibach equivalente a G.
Um APN que aceita $L(G')$ é $M = (\{q_0, q_f\}, \Sigma, V, \delta, \{q_0\}, \{q_f\})$, onde δ é assim:

Prova, continuação

- $\delta(q_0, \lambda, \lambda) = \{[q_f, S]\}$;
- Se $S \to \lambda \in P$, então $\delta(q_f, \lambda, S) = \{q_f, \lambda\}$;
- $\forall a \in \Sigma$ e cada $X \in V$,
  $\delta(q_f, a, X) = \{[q_f, y] \mid y \in V^*$ e $X \to ay \in P\}$

Para mostrar que $L(M) = L(G')$ basta mostrar que $\forall w \in \Sigma^*$ e $y \in V^*$, $S \stackrel{*}{\Rightarrow} wy$ se, se somente se, $[q_0, w, \lambda] \stackrel{*}{\vdash} [q_f, \lambda, y]$, pois quando $y = \lambda$ teremos que $\forall w \in \Sigma^*$, $S \stackrel{*}{\Rightarrow} w$ se, e somente se, $[q_0, w, \lambda] \stackrel{*}{\vdash} [q_f, \lambda, \lambda]$. As provas são feitas por indução.

Prova, continuação

Por indução no tamanho da derivação:
$\forall n \geq 1, w \in \Sigma^*, y \in V^*$, se $S \overset{n}{\Rightarrow} wy$ então $[q_0, w, \lambda] \overset{*}{\vdash} [q_f, \lambda, y]$.
Para $n = 1$, temos dois casos:

- $S \overset{1}{\Rightarrow} \lambda$ $(w = y = \lambda)$ e portanto $S \to \lambda \in P$. Nese caso, pela definição de δ, $[q_0, \lambda, \lambda] \vdash [q_f, \lambda, S] \vdash [q_f, \lambda, \lambda]$.
- $S \overset{1}{\Rightarrow} ay$ $(w = a)$ e portanto $S \to ay \in P$. Neste caso, $[q_0, a, \lambda] \vdash [q_f, a, S] \vdash [q_f, \lambda, y]$.

Prova, continuação

Assumimos que para um $n \geq 1$ que $\forall w \in \Sigma^*, y \in V^*$, se $S \overset{n}{\Rightarrow} wy$ então $[q_0, w, \lambda] \overset{*}{\vdash} [q_f, \lambda, y]$.

Suponha então que $S \overset{n+1}{\Longrightarrow} way, \forall y \in V^*$. Então temos duas alternativas:

- $S \overset{n}{\Rightarrow} waSy \overset{w}{\Rightarrow} ay$ com aplicação da regra $S \to \lambda$. Neste caso por hipótese de indução, e pela definição de δ, $[q_0, wa, \lambda] \overset{*}{\vdash} [q_f, \lambda, Sy]$ e assim $[q_f, \lambda, Sy] \vdash [q_f, \lambda, y]$ e portanto $[q_0, wa, \lambda] \overset{*}{\vdash} [q_f, \lambda, y]$.
- $S \overset{n}{\Rightarrow} wXu \overset{w}{\Rightarrow} azu$, sendo que $X \to az \in P$. e $y = zu$. Neste caso, pela hipótese de indução, $[q_0, w, \lambda] \overset{*}{\vdash} [q_f, \lambda, Xu]$ e assim $[q_0, wa, \lambda] \overset{*}{\vdash} [q_f, a, Xu]$. Como $X \to az \in P$, então $[q_f, a, Xu] \vdash [q_f, \lambda, zu]$. Mas $y = zu$ então segue que $[q_0, wa, \lambda] \overset{*}{\vdash} [q_f \lambda, y]$.

Exemplo

$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ tem igual número de zeros e uns.}\}$

Esta linguagem é gerada pela GLC seguinte:

$$\left\{ \; S \rightarrow 0S1S \mid 1S0S \mid \lambda \right.$$

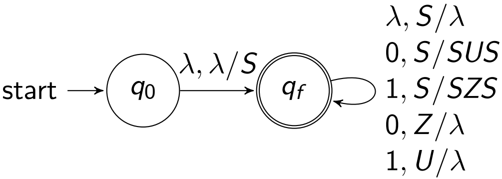
Em FNG:

$$\left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow 0SUS \mid 1SZS \mid \lambda \\ Z \rightarrow 0 \\ U \rightarrow 1 \end{array} \right.$$

Exemplo, continuação

Um AP é: $(\{q_0, q_f\}, \{0, 1\}, \{S, Z, U\}, \delta, q_0, \{q_f\})$, onde:

- $\delta(q_0, \lambda, \lambda) = \{[q_f, S]\}$
- $\delta(q_f, \lambda, S) = \{[q_f, \lambda]\}$
- $\delta(q_f, 0, S) = \{[q_f, SUS]\}$
- $\delta(q_f, 1, S) = \{[q_f, SZS]\}$
- $\delta(q_f, 0, Z) = \{[q_f, \lambda]\}$
- $\delta(q_f, 1, U) = \{[q_f, \lambda]\}$



Definição

Seja um APN $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, F)$. Dados dois estados $q_1, q_2 \in Q$ e $A \in \Gamma \cup \{\lambda\}$ um elemento do alfabeto da pilha.
Considere o conjunto $C(q_1, A, q_2)$ que contém todas as palavras $w \in \Sigma^*$ tais que o APN M, começando em q_1, com a pilha contendo A, termina no estado q_2, com a pilha vazia após consumir w, ou seja:

$$C(q_1, A, q_2) = \{w \in \Sigma^* \mid [q_1, w, A] \overset{*}{\vdash} [q_2, \lambda, \lambda]\}.$$

Observe que $L(M) = \cup_{(q_0, q_f) | \ q_f \in F} C(q_0, \lambda, q_f)$.

Ideia

Suponha que seja possível gerar o conjunto $C(q_1, A, q_2)$ por meio de uma gramática cuja variável de partida seja $[q_1, A, q_2]$.
Então $L(M)$ pode ser gerada por uma gramática constituída por todas as regras $[q_1, A, q_2]$, mais as regras da forma $P \rightarrow [q_0, \lambda, q_f]$, para cada $q_f \in F$.

Teorema

Para qualquer APN M, existe uma Gramática Livre de Contexto G que gera $L(M)$.

Prova

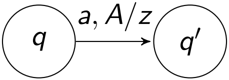
Seja um APN $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$. Construiremos uma GLC com variáveis da forma $[q_0, A, q_1]$, com $q_0, q_1 \in Q$ e $A \in \Gamma \cup \{\lambda\}$, de modo que $\forall w \in \Sigma^*$:

$$[q_0, A, q_1] \stackrel{*}{\Rightarrow} w \Leftrightarrow [q_0, w, A] \vdash^* [q_1, \lambda, \lambda].$$

G será: $G = (\Sigma, V, P, S)$, onde $V = \{S\} \cup \{Q \times (\Gamma \cup \{\lambda\}) \times Q\}$. As regras em P estão na próxima página.

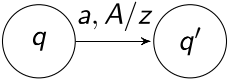
Prova, continuação

- Para $q_f \in F$:
  $S \to [q_0, \lambda, q_f]$;
- Para cada $q \in Q$, $[q, \lambda, q] \to \lambda$;
- Para cada transição $[q', z] \in \delta(q, a, A)$, onde $A \in \Gamma \cup \{\lambda\}$, $a \in \Sigma \cup \{\lambda\}$, e $z = B_1 B_2 \ldots B_n$, $B_i \in \Gamma, 1 \leq i \leq n$, as seguintes regras do TIPO 1:
  - Se $z = \lambda$, $[q, A, q_d] \to a[q', \lambda, q_d], \forall q_d \in Q$;
  - Se $z \neq \lambda$,
    $[q, A, q_{dn}] \to a[q', B_1, q_{d1}][q_{d1}, B_2, q_{d2}] \ldots [q_{dn-1}, B_n, q_{dn}]$,
    para cada n-upla de estados $(q_{d1}, q_{d2}, \ldots, q_{dn}) \in Q^n$;



Prova, continuação

- Se $A = \lambda$, acrescentar as seguintes regras do TIPO 2:
  - Se $z = \lambda$, $[q, C, q_d] \rightarrow a[q', C, q_d]$, para cada $C \in \Gamma$ e cada $q_d \in Q$.
  - Se $z \neq \lambda$, $[q, C, q_{dn+1}] \rightarrow a[q', B_1, q_{d1}][q_{d1}, B_2, q_{d2}] \ldots [q_{dn-1}, B_n, q_{dn}][q_{dn}, C, q_{dn+1}]$, para cada $C \in \Gamma$ e cada $(q_{d1}, \ldots, q_{dn}, q_{dn+1}) \in Q^{n+1}$.



Prova, continuação

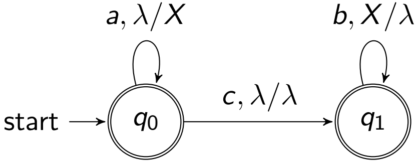
Agora basta provar que:

$[q, A, q'] \stackrel{*}{\Rightarrow} w$ se, e somente se, $[q, w, A] \vdash^* [q', \lambda, \lambda]$.

Para todo $q, q' \in Q, A \in \Gamma \cup \{\lambda\}$ e $w \in \Sigma^*$.
Isto segue da prova de que:
$[q, A, q_d n] \stackrel{*}{\Rightarrow} w[q_{d0}, B_1, q_{d1}] \ldots [q_{dn-1}, B_n, q_{dn}]$ se, e somente se, $[q, w, A] \vdash^* [q_{d0}, \lambda, B_1 B_2 \ldots B_n]$, para todo $q, q_{d0}, \ldots, q_{d_n} \in Q, A \in \Gamma \cup \{\lambda\}, B_1, \ldots, B_n \in \Gamma$ e $w \in \Sigma^*$, pois no caso em que $n = 0$ obtém-se a afirmativa anterior quando $q' = q_{d0}$.
A prova é por indução e será omitida.

Exemplo

Seja o AP que reconhece $L = \{a^n cb^n \mid n \geq 0\} \cup \{\lambda\}$:



Inicialmente:

- $S \rightarrow [q_0, \lambda, q_0] \mid [q_0, \lambda, q_1]$;
- $[q_0, \lambda, q_0] \rightarrow \lambda$;
- $[q_1, \lambda, q_1] \rightarrow \lambda$;

Exemplo, continuação

Em seguida, para a transição $[q_0, X] \in \delta(q_0, a, \lambda)$:

- TIPO 1:
  - $[q_0, \lambda, q_0] \rightarrow a[q_0, X, q_0]$;
  - $[q_0, \lambda, q_1] \rightarrow a[q_0, X, q_1]$;
- TIPO 2:
  - $[q_0, X, q_0] \rightarrow a[q_0, X, q_0][q_0, X, q_0] \mid a[q_0, X, q_1][q_1, X, q_0]$;
  - $[q_0, X, q_1] \rightarrow a[q_0, X, q_0][q_0, X, q_1] \mid a[q_0, X, q_1][q_1, X, q_1]$;

Exemplo, continuação

Em seguida, para a transição $[q_1, \lambda] \in \delta(q_0, c, \lambda)$:

- TIPO 1:
  - $[q_0, \lambda, q_0] \rightarrow c[q_1, \lambda, q_0]$;
  - $[q_0, \lambda, q_1] \rightarrow c[q_1, \lambda, q_1]$;
- TIPO 2:
  - $[q_0, X, q_0] \rightarrow c[q_1, X, q_0]$;
  - $[q_0, X, q_1] \rightarrow c[q_1, X, q_1]$;

Exemplo, continuação

Em seguida, para a transição $[q_1, \lambda] \in \delta(q_1, b, X)$:

- TIPO 1:
  - $[q_1, X, q_0] \rightarrow b[q_1, \lambda, q_0]$;
  - $[q_1, X, q_1] \rightarrow b[q_1, \lambda, q_1]$;

Exemplo, continuação

Eliminando as variáveis inúteis:

- $S \to [q_0, \lambda, q_0] \mid [q_0, \lambda, q_1]$;
- $[q_0, \lambda, q_1] \to a[q_0, X, q_1] \mid c[q_1, \lambda, q_1]$;
- $[q_0, X, q_1] \to a[q_0, X, q_1][q_1, X, q_1] \mid c[q_1, X, q_1]$;
- $[q_1, X, q_1] \to b[q_1, \lambda, q_1]$;
- $[q_0, \lambda, q_0] \to \lambda$;
- $[q_1, \lambda, q_1] \to \lambda$.

Exemplo, continuação

Renomeando as variáveis:

- $S \to A \mid B$;
- $B \to aC \mid cD$;
- $C \to aCE \mid cE$;
- $E \to bD$;
- $A \to \lambda$;
- $D \to \lambda$.

Resultado

As Gramáticas Livre de Contexto geram exatamente as linguagens reconhecidas por Autômatos com Pilha Não-Determinísticos.

Exercícios

- Seja o AP $P = (\{i\}, \{(,)\}, \{0\}, \delta, \{i\}, \{i\})$ tal que δ é dado por: $\delta(i, (, \lambda) = [i, 0]$ e $\delta(i,), 0) = [i, \lambda]$. Construa uma GLC que gere $L(P)$.

Licença

- Slides feitos em $\LaTeX$ usando beamer e tikz, editados com vim.
- Licença

Creative Commons Atribuição-Uso Não-Comercial-Vedada a Criação de Obras Derivadas 2.5 Brasil License.http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/br/