ITC: Introdução à Teoria da Computação

Marcos Castilho

DInf/UFPR

30 de junho de 2021

Propriedades de Linguagens Livre de Contexto

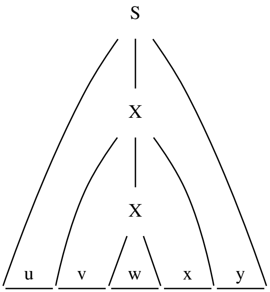
Lema do Bombeamento

Seja L uma Linguagem Livre de Contexto. Então existe uma constante $k > 0$ tal que, para qualquer palavra $z \in L$ com $|z| \geq k$ existem $u, v, w, x, y \in \Sigma^*$ que satisfazem as seguintes condições:

- $z = uvwxy$
- $|vwx| \leq k$
- $vx \neq \lambda$
- $uv^iwx^iy \in L, \forall i \geq 0$

Prova

Se L é finita o lema vale por vacuidade. Assuma $G = (V, \Sigma, P, S)$ uma GLC na NFC tal que $L(G)$ é infinita. Como V e P são finitos, existe um número $k > 0$ tal que qualquer palavra $z \in L$ com $|z| \geq k$ terá uma árvore de decisão assim:



Prova, continuação

Um caminho simpes que se inicia na raiz e $u, v, w, x, y \in \Sigma^*$. A variável X se repete, pois: basta tomar $k = 2^n$ com $n = card(V)$.
Se z é tal que $S \stackrel{*}{\Rightarrow} z$ e $|z| \geq 2^n$ então existe um caminho de tamanho pelo menos $n + 1$ e $card(V) + 1$ na árvore de decisão de $S \stackrel{*}{\Rightarrow} z$.
Se p é o maior caminho de S até uma folha, p deve conter pelo menos $n + 2$ nodos e portanto X aparece pelo menos duas vezes.

Lema

Seja G em FNC e $A \stackrel{*}{\Rightarrow} w$ uma derivação de $w \in \Sigma^*$ com árvore de decisão T. Se a profundidade de T é n então $|w| \leq 2^{n-1}$.

Corolário

Seja G em FNC e $S \stackrel{*}{\Rightarrow} w$ uma derivação de $w \in L(G)$. Se $|w| \geq 2^n$ então a árvore de decisão tem profundidade pelo menos $n + 1$.

Prova, continuação

Como G está em FNC, ou v ou x é diferente de λ e assim $vx \neq \lambda$. Logo, o caminho p que vai da primeira ocorrência de X até uma folha tem o tamanho máximo de $n+2$ nodos, e portanto a profundidade da árvore de decisão de $X \stackrel{*}{\Rightarrow} vwx$ é no máximo $n+1$. Logo, $|vwx| \leq 2^n$. Portanto, $S \stackrel{*}{\Rightarrow} uXy$, $X \stackrel{*}{\Rightarrow} vwx$ e $X \stackrel{*}{\Rightarrow} w$. Assim, $S \stackrel{*}{\Rightarrow} uXy \stackrel{*}{\Rightarrow} uv^iwx^iy, i \geq 0$ e consequentemente $uv^iwx^iy \in L, \forall i \geq 0$.

Exemplo

$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ não é uma linguagem livre de contexto. Suponha que L seja LLC. Seja k a constante do lema do bombeamento e seja $z = a^k b^k c^k \in L$. Como $|z| \geq k$ então existem $u, v, w, x, y \in \Sigma^*$ tal que:

- $z = uvwxy$
- $|vwx| \leq k$
- $vx \neq \lambda$
- $uv^i wx^i y \in L, \forall i \geq 0.$

Exemplo, continuação

Como $|vwx| \leq k$, então $u = a^k q$, para algum q ou $y = pc^k$, para algum p, onde $v \neq \lambda$ ou $x \neq \lambda$.

- Primeiro caso: $u = a^k q$. Seja $i = 2$ e uv^2wx^2y contém menos a's do que b's e c's.
- Segundo caso: $y = pc^k$. Seja $i = 2$ e uv^2wx^2y contém menos c's do que a's e b's.

Logo, $uv^2wx^2y \notin L$. Portanto L não é LLC.

Exemplo 2

$L = \{a^i b^j a^i b^j \mid i, j \geq 0\}$ não é uma linguagem livre de contexto. Suponha que L seja LLC. Seja k a constante do lema do bombeamento e seja $z = a^k b^k a^k b^k \in L$. Como $|z| \geq k$ então o lema se aplica $z = uvwxy$ satisfazendo as demais condições do lema, isto é:

- $|vwx| \leq k$
- $vx \neq \lambda$
- $uv^i wx^i y \in L, \forall i \geq 0.$

Como $|vwx| \leq k$ então temos dois casos:

- Primeiro caso: $vwx \in a^*$ ou $vwx \in b^*$
- Segundo caso: $vwx \in a^* b^*$ ou $vwx \in b^* a^*$

De toda maneira, v e x contém apenas a's ou apenas b's. Bombear v e x aumenta o número de a's ou b's em apenas uma das subpalavras de z. Portanto L não é LLC.

Exemplo 3

$L = \{w \in a^* \mid |w| \text{ é primo}\}$ não é LLC.
Suponha que L seja LLC e seja n um primo maior do que k, onde k é a constante do lema do bombeamento. Logo, $a^n = uvwxy$ satisfazendo as demais condições do lema.
Seja $m = |u| + |w| + |y|$.
Considere agora $|uv^iwx^iy| = m + i(n - m)$ e tomemos $i = n + 1$.
Temos:
$|uv^{n+1}wx^{n+1}y| = m + (n+1)(n-m) = n(n-m+1)$, onde $n > 1$ e $n - m + 1 > 1$.
Portanto $|uv^{n+1}wx^{n+1}y| \notin L$, e assim L não é LLC.

Teorema

O conjunto das linguagens livre de contexto é fechado sob as operações de união, concatenação e fecho de Kleene.

Prova

Sejam duas LLC's pars L_1 e L_2 com gramáticas $G_1 = (V_1, \Sigma_1, P_1, S_1)$ e $G_2 = (V_2, \Sigma_2, P_2, S_2)$ tais que $L_1 = L(G_1)$ e $L_2 = L(G_2)$.

- Gramática para $L_1 \cup L_2$: $V_3 = V_1 \cup V_2 \cup \{S_3\}$, $\Sigma_3 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, $P_3 = P_1 \cup P_2 \cup \{S_3 \to S_1, S_3 \to S_2\}$ e $S_3 \notin V_1 \cup V_2$.
- Gramática para $L_1 L_2$: $V_3 = V_1 \cup V_2 \cup \{S_3\}$, $\Sigma_3 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, $P_3 = P_1 \cup P_2 \cup \{S_3 \to S_1 S_2\}$ e $S_3 \notin V_1 \cup V_2$.
- Gramática para L_1^*: $V_3 = V_1 \cup \{S_3\}$, $\Sigma_3 = \Sigma_1$, $P_3 = P_1 \cup \{S_3 \to S_1 S_3, S_3 \to \lambda\}$ e $S_3 \notin V_1$.

Teorema

A classe das linguagens livre de contexto não é fechada sob interseção nem sob complementação.

Prova

Sejam $L_1 = \{a^n b^n c^k \mid n, k \geq 0\}$ e $L_2 = \{a^n b^k c^k \mid n, k \geq 0\}$.
Tanto L_1 quanto L_2 são LLC, mas $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$, que não é LLC.
Também, pelas leis de De Morgan, como $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$ e como LLC's são fechadas sob união, também seriam sob interseção, se fossem sob complementação.

Teorema

Seja L uma linguagem livre de contexto e R uma linguagem regular. Então $L \cap R$ é uma linguagem livre de contexto.

Prova

Basta simular a execução "em paralelo" de um APN para L e um AF para R. A pilha final é a pilha do APN de L.

Exercícios

- Use o lema do bombeamento para mostrar que as seguintes linguagens não são livre de contexto:
  - $\{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$
  - $\{a^n b^k c^n d^k \mid n, k > 0\}$
- Sejam $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ e $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|$ é um múltiplo de 5.$\}$ Mostre, para cada linguagem a seguir, que ela é ou não uma LLC.
  - $\overline{L_1}$
  - $L_1 \cap L_2$
  - $L_1 \cap \overline{L_2}$
- Seja $n_a(w)$ a quantidade de a's em uma palavra w. Prove que as seguintes linguagens são ou não são LLC.
  - $\{w \in \{a, b, c\}^* \mid n_a(w) = n_b(w)\}$.
  - $\{w \in \{a, b, c\}^* \mid n_a(w) = n_b(w) = n_c(w)\}$.
  - $\{w \in \{a, b, c\}^* \mid n_c(w)$ é um quadrado perfeito$\}$.

Licença

- Slides feitos em LaTeX usando beamer e tikz, editados com vim.
- Licença

