

ITC: Introdução à Teoria da Computação

Marcos Castilho

DInf/UFPR

12 de julho de 2021

Critérios alternativos de aceitação

Definição: Seja $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0)$ uma máquina de Turing que aceita *por parada*. Uma palavra $w \in \Sigma^*$ é *aceita por parada* se a computação de M com entrada w para (normalmente). Se a computação para de maneira anormal w é rejeitada.

A linguagem de M , $L(M)$, é o conjunto de todas as palavras aceitas por M .

Teorema

As seguintes sentenças são equivalentes:

- ▶ A linguagem L é aceita por uma máquina de Turing por estado final.
- ▶ A linguagem L é aceita por uma máquina de Turing por parada.

Prova, primeira parte

Seja $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0)$ uma MT que aceita L por parada.

Basta construir $M' = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Q)$.

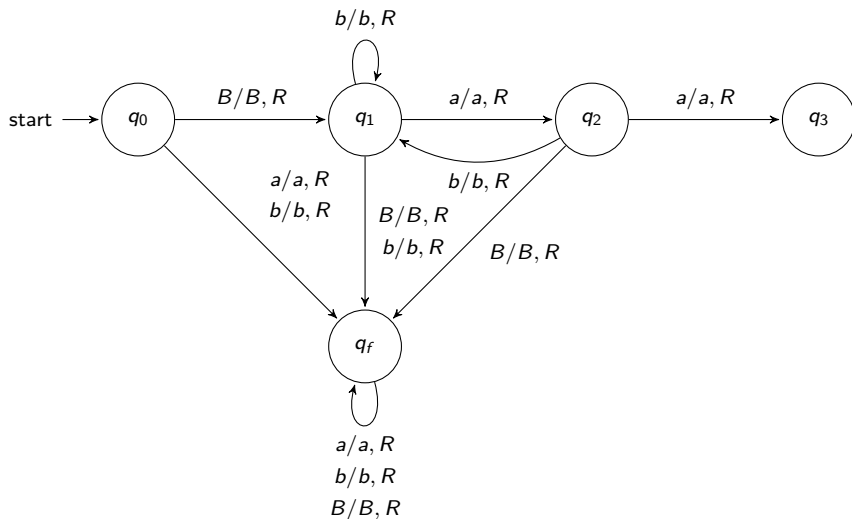
Prova, segunda parte

Seja $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ uma MT que aceita L por estado final. Definimos $M' = (Q \cup \{q_f\}, \Sigma, \Gamma, \delta', q_0)$ que aceita por parada assim:

1. Se $\delta(q_i, x)$ é definido, então $\delta'(q_i, x) = \delta(q_i, x)$.
2. Para cada estado $q_i \in Q - F$, se $\delta(q_i, x)$ é indefinido, então $\delta'(q_i, x) = [q_f, x, R]$.
3. Para cada $x \in \Gamma$, $\delta'(q_f, x) = [q_f, x, R]$.

As computações de palavras em M e M' são idênticas, pois M' entra em q_f e não para mais para as computações não definidas de M . Somente as palavras aceitas em M provocam M' parar.

Exemplo



Exercícios

- ▶ Modifique as máquinas de Turing feitas para os exercícios da aula anterior para que elas aceitem as linguagens por parada.

Máquinas de Turing multitrilha

Definição: Uma Máquina de Turing multitrilha é uma quintupla sêxtupla $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$, onde:

- ▶ $Q, \Sigma, \Gamma, q_0, F$ são como na máquina de Turing padrão;
- ▶ $\delta : Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R\}$, é a função função de transição.

0	1	2	3	4	...
a_0^k	a_1^k	a_2^k	$\vdots$	a_k^k	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_0^2	a_1^2	a_2^2	$\vdots$	a_k^2	...
B	a_1^1	a_2^1	$\vdots$	a_k^1	...

↑

q_0

Detalhamento

Assim, as transições têm a forma

$\delta(q, a_1, a_2, \dots, a_k) = [q', b_1, b_2, \dots, b_k, d]$, indicando que, para cada $i = 1, \dots, k$, a_i deve ser substituído por b_i , $q, q' \in Q$ e $d \in \{L, R\}$..

A máquina lê simultaneamente todas as células de uma mesma coluna de todas as trilhas, isto é, uma k -upla $[a_1, \dots, a_k]$, onde cada a_i é o símbolo da trilha i .

A entrada é colocada na trilha 1, da maneira usual para as máquinas padrão. Todas as outras trilhas contém inicialmente brancos.

Neste modelo, a aceitação é por estado final.

Teorema

Uma linguagem L é aceita por uma máquina de Turing multitrilha se, e somente se, é aceita por uma máquina de Turing padrão.

Prova

A volta é trivial, basta usar apenas a trilha 1. O outro lado da demonstração segue abaixo para o caso de duas trilhas, basta generalizar para k trilhas.

Seja $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ uma máquina de Turing multitrilha. Podemos construir uma máquina de Turing padrão assim:

$$M' = (Q, \Sigma \cup \{B\}, \Gamma \times \Gamma, \delta', q_0, F).$$

O alfabeto consiste de pares ordenados de elementos de M . A entrada são pares ordenados cujo segundo componente é branco.

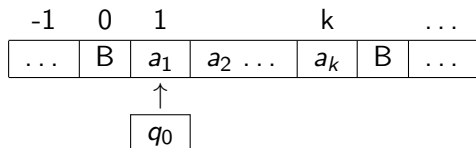
Assim, $\delta'(q_i, [x_1, x_2]) = \delta(q_i, x_1, x_2)$, e desta forma $L(M')$ aceita $L(M)$.

Observações

O modelo das máquinas de Turing multitrilhas não aumenta o poder de reconhecimento das máquinas padrão. Mas este modelo vai servir de base para facilitar os próximos resultados que veremos na sequência.

Máquinas de Turing com fita infinita para os dois lados

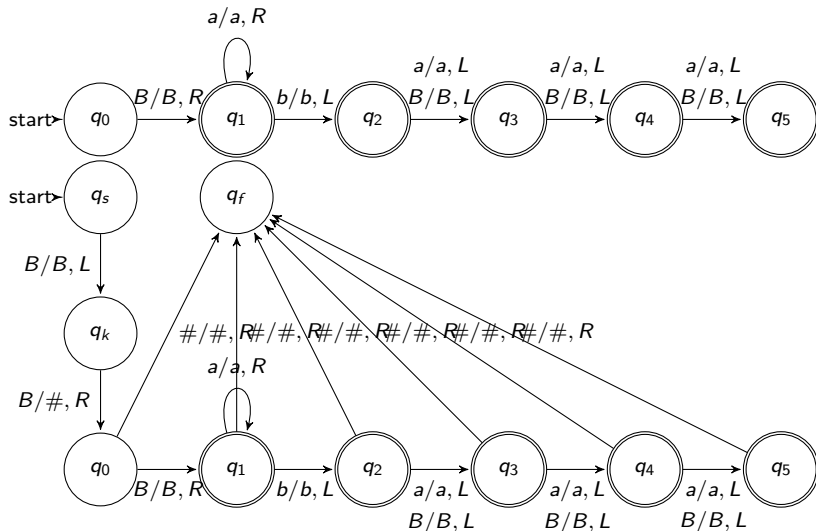
Definição: Uma Máquina de Turing com fita infinita para os dois lados difere da máquina de Turing padrão apenas pelo fato da fita não ter a limitação à esquerda, sendo infinita para ambos os lados. Há brancos em todas as posições da fita, menos nas que contém a entrada, conforme a figura abaixo.



Observações

Podemos simular uma máquina de Turing padrão em uma máquina de Turing com fita infinita para os dois lados. Basta colocar um símbolo diferente, por exemplo, $\#$, simulando o limite esquerdo.

Exemplo



Simulação inversa

Agora podemos simular o inverso, isto é, a linguagem aceita por uma máquina de Turing com fita infinita para os dois lados é também aceita por uma máquina de Turing padrão.

De fato, considere os seguintes desenhos:

Ilustração

-3	-2	-1	0	1			k		...
		...	B	a_1	a_2 ...		a_k	B	...

-1	-2	-3			...
					...
B	a_1	a_2	...	a_k	...
0	1	2		k	...

Simulação inversa, continuação

Assim, a computação de M (MT com fita infinita para os dois lados) pode ser simulada em M' (MT multitrila).

Seja $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$. Os símbolos U e D são utilizados para dizer qual das duas fitas deve ser considerada para se determinar a transição. Isto é mantido pelos estados da máquina de duas trilhas assim:

- ▶ $Q' = (Q \cup \{q_s, q_t\}) \times \{U, D\}$
- ▶ $\Sigma' = \Sigma$
- ▶ $\Gamma' = \Gamma \cup \{\#\}$
- ▶ $F' = \{[q_i, U], [q_i, D] \mid q_i \in F\}$.
- ▶ Estado inicial: $[q_s, D]$

Simulação inversa, continuação

- ▶ No início, escrevemos um $\#$ na primeira posição da segunda trilha:
 - ▶ $\delta'([q_s, D], [B, B]) = [[q_t, D], [B, \#], R]$.
- ▶ Depois, retorna-se à posição original:
 - ▶ $\forall x \in \Gamma, \delta'([q_t, D], [x, B]) = [[q_0, D], [x, B], L]$.
- ▶ Em seguida, simula-se M :
 - ▶ $\forall z \in \Gamma - \{\#\}$ e $d \in \{L, R\}, \delta'([q_i, D], [x, z]) = [[q_j, D], [y, z], d]$, quando $\delta(q_i, x) = [q_j, y, d]$ em M .
 - ▶ $\forall x \in \Gamma - \{\#\}$ e $d \in \{L, R\}, \delta'([q_i, U], [z, x]) = [[q_j, U], [z, y], d']$, quando $\delta(q_i, x) = [q_j, y, d]$ em M e onde d' é a direção oposta à de d .

Simulação inversa, continuação

- ▶ Agora, simula-se a transição na posição zero:
 - ▶ $\delta'([q_i, D], [x, \#]) = [[q_j, U], [y, \#], R]$, quando $\delta(q_i, x) = [q_j, y, L]$ em M .
 - ▶ $\delta'([q_i, D], [x, \#]) = [[q_j, D], [y, \#], R]$, quando $\delta(q_i, x) = [q_j, y, R]$ em M .
 - ▶ $\delta'([q_i, U], [x, \#]) = [[q_j, D], [y, \#], R]$, quando $\delta(q_i, x) = [q_j, y, R]$ em M .
 - ▶ $\delta'([q_i, U], [x, \#]) = [[q_j, U], [y, \#], R]$, quando $\delta(q_i, x) = [q_j, y, L]$ em M .

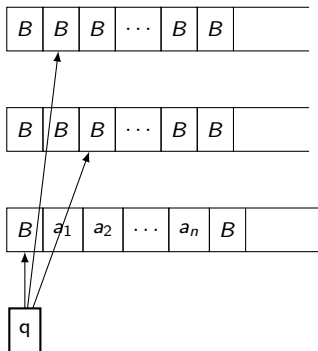
Teorema

Uma linguagem L é aceita por uma máquina de Turing padrão se, e somente se, L é aceita por uma máquina de Turing com fita infinita para os dois lados.

Máquinas de Turing multifita

Definição: Uma Máquina de Turing multifita consiste de k fitas e k cabeçotes independentes.

Há brancos em todas as posições de todas as fitas, menos nas que contém a entrada, conforme a figura abaixo.



Funcionamento

Nas transições:

- ▶ A máquina muda de estado;
- ▶ A máquina escreve um símbolo em cada fita, no lugar em que os respectivos cabeçotes apontam;
- ▶ A máquina reposiciona cada um dos cabeçotes conforme a função de transição determina.

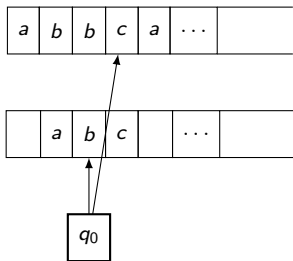
Teorema

Uma linguagem L é aceita por uma máquina de Turing multifita se, e somente se, L é aceita por uma máquina de Turing padrão.

Prova

Simula-se uma máquina de Turing com k fitas usando-se uma máquina de Turing multitrilhas com $2k + 1$ trilhas. A ilustração seguinte mostra isto para $k = 2$.

Ilustração



#					...
			x		...
a	b	b	c	a	...
		x			...
	a	b	c		...

Prova, continuação

- ▶ A ação inicial da simulação é escrever $\#$ na posição mais à esquerda da trilha 5 e X na posição mais à esquerda das trilhas 2 e 4.
- ▶ O restante da computação consiste de uma sequência de ações que simulam a máquina de duas fitas.
- ▶ A transição da máquina de duas fitas é determinada pelos dois símbolos escaneados e o estado da máquina.
- ▶ A simulação na máquina de 5 trilhas grava os símbolos marcados pelos dois x 's.
- ▶ Os estados são 9-tuplas assim: $[s, q_i, x_1, x_2, y_1, y_2, d_1, d_2]$, onde $q_i \in Q$, $x_i, y_i \in \Sigma \cup \{U\}$, $d_i \in \{L, R, S, U\}$.
- ▶ s é o status da simulação de M .
- ▶ O símbolo U que foi adicionado indica que este item é desconhecido.

Prova, continuação

- ▶ Seja $\delta(q_i, x_1, x_2) = [q_j; y_1, d_1; y_2, d_2]$ uma transição da máquina de duas fitas M . M' inicia a simulação de M no estado $[f_1, q_i, U, U, U, U, U, U]$. As seguintes cinco ações simulam uma transição de M na máquina multitrilha M' :
 - ▶ f_1 (encontrar o primeiro símbolo): M' se move para a direita até encontrar o x na trilha 2 e entra no estado $[f_1, q_i, x_1, U, U, U, U, U]$, onde x_1 é o símbolo da trilha 1 que está sob o x . Após gravar o símbolo na trilha 1 neste estado M' retorna para a posição inicial. $\#$ na trilha 5 é usado para reposicionar o cabeçote.

Prova, continuação

- ▶ f_1 (encontrar o segundo símbolo): M' se move para a direita até encontrar o x na trilha 4 e entra no estado $[f_2, q_i, x_1, x_2, U, U, U, U]$, onde x_2 é o símbolo da trilha 3 que está sob o x . Após gravar o símbolo na trilha 3 neste estado M' retorna para a posição inicial.
- ▶ M' entra no estado $[p_1, q_j, x_1, x_2, y_1, y_2, d_1, d_2]$. Este estado contém a informação necessária para simular a transição de M .

Prova, continuação

- ▶ p_1 (escrever o primeiro símbolo): M' se move à direita do x na trilha 2 e escreve o símbolo y_1 na trilha 1. O x na trilha 2 é movido na direção determinada por d_1 . A máquina retorna para a posição inicial.
- ▶ p_1 (escrever o segundo símbolo): M' se move à direita do x na trilha 4 e escreve o símbolo y_2 na trilha 3. O x na trilha 4 é movido na direção determinada por d_2 . A máquina retorna para a posição inicial.

Se $\delta(q_i, x_1, x_2)$ é indefinido na máquina M , a simulação para após retornar para a posição inicial no segundo passo acima. O estado $[f_2, q_i, x_1, y_1, U, U, U, U]$ é um estado final de M' quando q_i é um estado final de M .

Exemplo 1

Seja $L = \{a^k \mid k \text{ é um quadrado perfeito}\}$.

Usamos uma máquina de 3 fitas:

- ▶ A primeira conterà a palavra de entrada;
- ▶ A entrada é comparada com uma palavra de x 's na fita 2 contendo um tamanho que é um quadrado perfeito (k_2);
- ▶ A fita 3 contém uma palavra cujo tamanho é a raiz quadrada da palavra da fita 2 (k).

Exemplo 1, continuação

Os valores de k e de k^2 são incrementados até que o tamanho da palavra na fita 2 seja maior ou igual ao tamanho da entrada na fita 1.

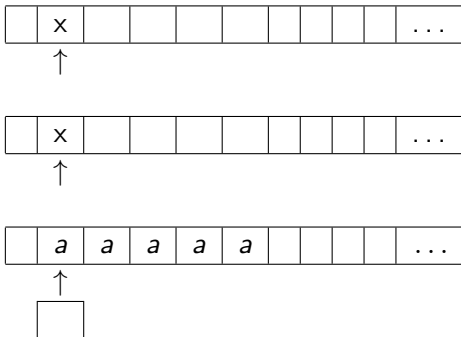
- ▶ Se a entrada é nula, a computação termina em um estado final, senão as fitas 2 e 3 são inicializadas com um x na posição 1. Os três cabeçotes são movidos para a posição 1.
- ▶ A fita 3 contém a sequência de k x 's e a fita 2 contém k^2 x 's. Simultaneamente, os cabeçotes das fitas 1 e 2 são movidos para a direita enquanto os dois cabeçotes escaneiam células não brancas. O cabeçote da fita 3 permanece parado na posição 1.
 - ▶ Se os dois cabeçotes lerem simultaneamente um branco, então a computação termina e a palavra é aceita.
 - ▶ Se o cabeçote 1 le um branco e o cabeçote 2 um x então a computação termina e a palavra é rejeitada.

Exemplo 1, continuação

- ▶ As fitas são reconfiguradas para comparação com o próximo quadrado perfeito:
 - ▶ Um x é adicionado à direita do final da palavra de x 's na fita 2;
 - ▶ Duas cópias da palavra da fita 3 são concatenadas à direita ao final da palavra na fita 2. Isto constroi uma sequência de $(k + 1)^2$ x 's na fita 2.
 - ▶ Um x é adicionado à direita ao final da palavra de x 's na fita 4. Isto constroi uma sequência de $k + 1$ x 's na fita 3.
 - ▶ Os cabeçotes são então reposicionados na posição 1 das suas respectivas fitas.
- ▶ Os passos 2 a 4 acima são repetidos.

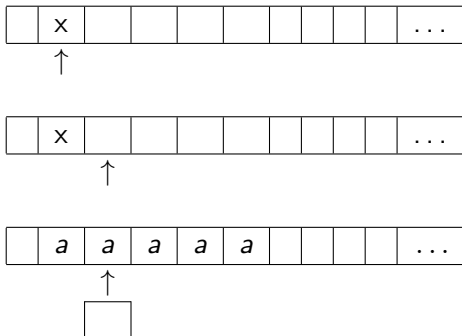
Exemplo 1, continuação

No primeiro passo, as computações para a palavra de entrada *aaaaa* produzem a seguinte configuração da máquina:



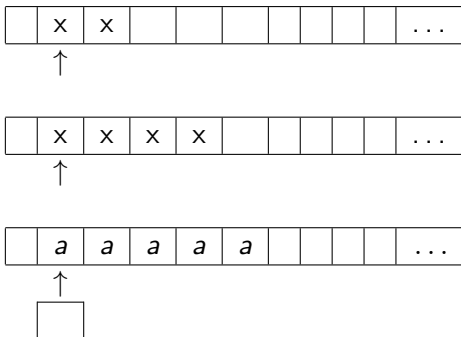
Exemplo 1, continuação

Quando o cabeçote 2 escaneia o branco na posição 2, após simultaneamente mover da esquerda para a direita os cabeçotes 1 e 2:



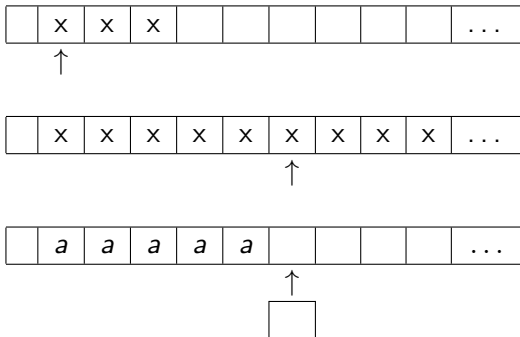
Exemplo 1, continuação

Na terceira parte do passo 3, reformatando as fitas 2 e 3 para que a computação possa ser comparada com o próximo quadrado perfeito:



Exemplo 1, continuação

Finalmente, com outra iteração do passo 2, a máquina para e rejeita a palavra de entrada:

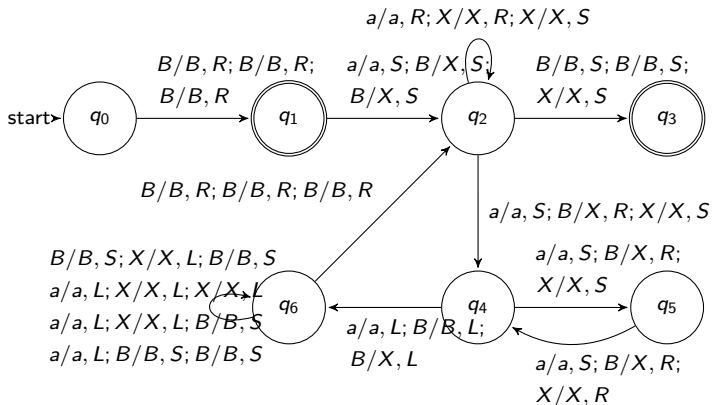


Exemplo 1, continuação

A existência desta máquina de Turing garante que L é recursivamente enumerável, mas também é recursiva, pois ela para qualquer ser seja a entrada.

Exemplo 1, continuação

A máquina acima pode ser vista no seguinte diagrama:



Exemplo 1, continuação

Explicação:

- ▶ $q_0 \rightarrow q_1$: inicia as fitas
- ▶ $q_2 \rightarrow q_2$: compara as palavras nas fitas 1 e 2
- ▶ $q_2 \rightarrow q_3$: aceita a palavra
- ▶ $q_4 \rightarrow q_5$: reescreve fitas 2 e 3
- ▶ $q_6 \rightarrow q_6$: reposiciona os cabeçotes
- ▶ $q_6 \rightarrow q_2$: repete o ciclo de comparação

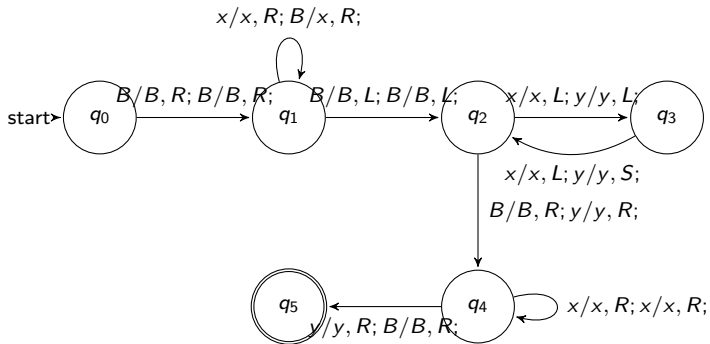
Exemplo 2

Seja $L = \{uu \mid u \in \{a, b\}^*\}$.

Podemos fazer uma máquina conforme a figura seguinte, na qual

- ▶ x, y representam qualquer símbolo da entrada
- ▶ A computação inicia fazendo uma cópia da palavra de entrada na fita 2
- ▶ Na sequência, os cabeçotes retornam de maneira que o cabeçote da fita 1 volta sempre duas posições a mais do que o da fita 2, para cada movimento
- ▶ Se a computação termina em q_3 é porque a palavra tem tamanho ímpar e é rejeitada
- ▶ O laço em q_4 compara a primeira metade da entrada com a segunda metade, cada uma em uma fita
- ▶ Se elas casam, a computação termina em q_5 com aceitação.

Exemplo 2, continuação



Exercícios

- ▶ Construa uma MT com fita infinita para os dois lados e alfabeto de entrada $\{a\}$ que para se a fita contém um símbolo não branco. Este símbolo pode estar em qualquer lugar da fita, não necessariamente à direita do cabeçote.
- ▶ Uma MT bidirecional é uma em que a fita consiste de um array bidimensional de células (uma matriz). A transição consiste em reescrever a célula e mover o cabeçote para qualquer uma das quatro células adjacentes (cuidado com as bordas). Uma computação inicia com o cabeçote lendo o primeiro canto inferior esquerdo. As transições são escritas $\delta(q_i, x) = [q_j, y, d]$, onde d é C (cima), B (baixo), D (direita) ou E (esquerda). Projete uma MT bidirecional com alfabeto de entrada $\{a\}$ que para se a fita contém um símbolo não branco.

Exercícios, continuação

- ▶ Seja L a linguagem dos palíndromes sobre $\{a, b\}$.
 - ▶ Construa uma MT padrão que aceita L .
 - ▶ Construa uma MT com duas fitas que aceita L para a qual a computação com entrada u não faça mais do que $3|u| + 4$ transições.
- ▶ Construa uma MT com duas fitas que aceita palavras nas quais cada a é sucedido por um número crescente de b 's, isto é, as palavras têm a forma $ab^{n_1}ab^{n_2}ab^{n_3} \dots ab^{n_k}$, $k > 0$, onde $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k$

Licença

- ▶ Slides feitos em $\text{\LaTeX}$ usando beamer e tikz, editados com vim.
- ▶ Licença

Creative Commons Atribuição-Uso Não-Comercial-Vedada a Criação de Obras Derivadas 2.5 Brasil License.<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/br/>

Creative Commons Atribuição-Uso Não-Comercial-Vedada a Criação de Obras Derivadas 2.5 Brasil License.<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/br/>