ITC: Introdução à Teoria da Computação

Prof. Dr. Marcos Castilho

Departamento de Informática/UFPR

27 de Fevereiro de 2018

Definição: Concatenação

Sejam $u, v \in \Sigma^*$. A *concatenação* de u e v, denotado por uv é a operação binária sobre Σ^* assim definida

- (i) BASE: Se $tamanho(v) = 0$ então $v = \lambda$ e $uv = u$.
- (ii) PASSO RECURSIVO: Seja v uma palavra com tamanho $tamanho(v) = n > 0$. Então $v = wa$ para algum $w \in \Sigma^*$ com $tamanho(w) = n - 1$ e $a \in \Sigma$, e $uv = (uw)a$.
- (iii) FECHO: Uma palavra w é a concatenação de duas palavras u e v somente se podem ser obtidas a partir da BASE com um número finito de aplicações do passo recursivo.

Exemplo

Sejam $u = ab$, $v = ca$, $w = bb$.

Então:

- $uv = abca$
- $vw = cabb$
- $(uv)w = abcabb$
- $u(vw) = abcabb$

Teorema

Sejam $u, v, w \in \Sigma^*$. Então $(uv)w = u(vw)$.

Prova: (por indução no tamanho de w).

- BASE: $tamanho(w) = 0$. Portanto $w = \lambda$ e $(uv)w = uv$, pela definição de concatenação.
- HIPÓTESE DE INDUÇÃO: Suponhamos que $(uv)w = u(vw)$, $\forall w \in \Sigma^* \mid tamanho(w) \leq n, n \geq 0$.

Continuação da prova

- PASSO DE INDUÇÃO: Seja $w \in \Sigma^* \mid tamanho(w) = n + 1$.
  Então: $(uv)w = (uv)(za)$, substituição de $w = za, a \in \Sigma$,
  $= ((uv)z)a$, pela definição de concatenação,
  $= (u(vz)a)$, pela hipótese de indução,
  $= u((vz)a)$, pela definição de concatenação,
  $= u(v(za))$, pela definição de concatenação,
  $= u(vw)$, substituindo $za = w$.

Observação 1

- Assim, podemos omitir os parênteses de uma sequência de aplicações da concatenação.

Observação 2

Podemos usar as seguintes abreviações:

- $uu = u^2$
- $uuu = u^3$
- $\lambda = u^0$

e assim por diante.

A concatenação não é comutativa

Prova (por contraexemplo)

- $u = ab$
- $v = ca$
- $uv = abca$
- $vu = caab$

E portanto, por exemplo:

$$u^2 = (ab)^2 = abab \neq aabb = a^2b^2.$$

Definição: subpalavra

Podemos definir subpalavra usando o conceito de concatenação:

u é subpalavra de v se $\exists x, y \in \Sigma^* \mid v = xuy$

Definições

Se $v = xuy$:

- um *prefixo* de v é uma subpalavra u tal que $x = \lambda$
- um *sufixo* de v é uma subpalavra u tal que $y = \lambda$ e $v = xu$

Definição: palavra reversa

Seja $u \in \Sigma^*$ uma palavra. A *palavra reversa* de u, denotada u^R é assim definida:

- BASE: $tamanho(u) = 0$. Então $u = \lambda$ e $\lambda^R = \lambda$
- PASSO RECURSIVO: Se $tamanho(u) = n > 0$, então $u = wa, w \in \Sigma^*, a \in \Sigma$, onde $tamanho(w) = n - 1$ e $u^R = aw^R$.
- FECHO: Uma palavra reversa u^R só pode ser obtida a partir de uma palavra u se puder ser obtida a partir da base por um número finito de aplicações do passo recursivo.

Teorema

Sejam $u, v \in \Sigma^*$. Então $(uv)^R = v^R u^R$.

Prova: (por indução no tamanho de v).

- BASE: $tamanho(v) = 0$, logo $v = \lambda$ e $(uv)^R = u^R = \lambda u^R = v^R u^R$.
- HIPÓTESE DE INDUÇÃO: Suponhamos que $(uv)^R = v^R u^R$ para qualquer $v \in \Sigma^*$ tal que $tamanho(v) \leq n, n \geq 0$.

Continuação da prova

- PASSO DE INDUÇÃO: Seja $v \in \Sigma^* \mid tamanho(v) = n + 1$, isto é, $v = wa, w \in \Sigma^*, tamanho(w) = n$ e $a \in \Sigma$.
- Assim:
- $(uv)^R = (u(wa))^R = ((uw)a)^R$, associatividade da concatenação
  $= a(uw)^R$, definição de palavra reversa
  $= a(w^R u^R)$, pela hipótese de indução
  $= (aw^R)u^R$, associatividade da concatenação
  $= (wa)^R u^R$, pela definição de palavra reversa
  $= v^R u^R$.

Exercícios

1. Dê uma definição recursiva para o tamanho de uma palavra sobre Σ. Use a operação primitiva da definição de palavra.
2. Usando indução em i, prove que $(w^R)^i = (w^i)^R, \forall w \in \Sigma^*$ e $\forall i \geq 0$.
3. Prove, usando indução no tamanho da palavra, que $(w^R)^R = w, \forall w \in \Sigma^*$.

Licença

- Slides feitos em LaTeX usando beamer e tikz, editados com vim.
- Licença