

ITC: Introdução à Teoria da Computação

Prof. Dr. Marcos Castilho

Departamento de Informática/UFPR

27 de Fevereiro de 2018

Especificação finita de linguagens

Linguagens interessantes têm palavras com formas específicas que requerem uma definição não ambígua.

- ▶ Solução 1: descrever todos os elementos da linguagem, o que é impossível para linguagens infinitas.
- ▶ Solução 2: apenas para linguagens simples, usar definições recursivas.

Exemplo 1

A linguagem L das palavras sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ onde as palavras começam com um a e têm tamanho par.

- ▶ BASE: $aa, ab \in L$
- ▶ PASSO RECURSIVO: Se $u \in L$ então $uaa, uab, uba, ubb \in L$.
- ▶ FECHO: Só podem pertencer à L as palavras obtidas a partir da base com um número finito de aplicações do passo recursivo.

Exemplo 2

A linguagem L de palavras sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ onde cada ocorrência de um b é imediatamente precedida por um a . Por exemplo: $\lambda, a, abaab \in L$, mas $bb, bab, abb \notin L$.

- ▶ BASE: $\lambda \in L$
- ▶ PASSO RECURSIVO: Se $u \in L$, então $ua, uab \in L$.
- ▶ FECHO: Só podem pertencer à L as palavras obtidas a partir da base com um número finito de aplicações do passo recursivo.

Observação

- ▶ Este tipo de definição não é muito apropriado para linguagens mais complexas.
- ▶ Assim, veremos como usar operações sobre conjuntos para construir conjuntos complexos a partir dos mais simples.

Definição

A concatenação de duas linguagens X e Y , denotada por XY , é a linguagem:

$$\blacktriangleright XY = \{xy \mid x \in X, y \in Y\}.$$

A concatenação de X consigo mesmo, n vezes, é X^n .

Obs.: $X^0 = \{\lambda\}$.

Note que $\{\lambda\} \neq \emptyset$.

Exemplo

Sejam $X = \{a, b, c\}$ e $Y = \{abb, ba\}$

Então:

- ▶ $XY = \{aabb, babb, cabb, aba, bba, cba\}$
- ▶ $X^0 = \{\lambda\}$
- ▶ $X^1 = X = \{a, b, c\}$
- ▶ $X^2 = XX = \{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}$
- ▶ $X^3 = X^2X = \{aaa, \dots, ccc\}$
- ▶ ...

Definição: Fecho de Kleene

Seja X um conjunto. Então:

$$X^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} X^i$$

$$X^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} X^i$$

$$X^+ = XX^*$$

Problema

Como especificar uma linguagem de modo não ambíguo?

- ▶ Uma maneira é usar operações sobre conjuntos!

Exemplo 1

Defina L como a linguagem de todas as palavras sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ de maneira que L contenha todas, e apenas, as palavras que contêm a subpalavra bb .

► $L = \{a, b\}^* \{bb\} \{a, b\}^*.$

Definimos as palavras que contêm pelo menos uma ocorrência da subpalavra bb .

Exemplo 2

Defina L como a linguagem de todas as palavras sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ de maneira que L contenha todas, e apenas, as palavras que iniciam pela subpalavra aa ou terminam com a subpalavra bb .

Palavras que têm prefixo aa :

$$\{aa\}\{a, b\}^*$$

Palavras que têm sufixo bb :

$$\{a, b\}^*\{bb\}$$

Logo, o que queremos é a união destas duas:

$$\{aa\}\{a, b\}^* \cup \{a, b\}^*\{bb\}$$

Exemplo 3

Seja $L_1 = \{bb\}$ e seja $L_2 = \{\lambda, bb, bbbb\}$.

Obviamente, L_1 e L_2 são linguagens sobre $\Sigma = \{b\}$.

Porém, interessante notar que:

L_1^* e L_2^* contêm palavras constituídas por um número par de b's.

Exemplo 4

O conjunto $\{aa, bb, ab, ba\}^*$ contém todas as palavras de tamanho par sobre $\{a, b\}$.

Logo, podemos usar o operador diferença de conjuntos para especificar a linguagem das palavras de tamanho ímpar!

$$\{a, b\}^* - \{aa, bb, ab, ba\}^*$$

Mas também podemos especificar a mesma linguagem de outra maneira:

$$\{a, b\}\{aa, bb, ab, ba\}^*$$

Definição

Seja Σ um alfabeto. Os *conjuntos regulares* sobre Σ são definidos recursivamente assim:

- ▶ BASE: Os conjuntos $\emptyset$, $\{\lambda\}$, $\{a\}$, $\forall a \in \Sigma$, são conjuntos regulares sobre Σ .
- ▶ PASSO RECURSIVO: Sejam X e Y dois conjuntos regulares sobre Σ . Então os conjuntos $X \cup Y$, XY e X^* são conjuntos regulares sobre Σ .
- ▶ FECHO: X é regular sobre Σ somente se for obtido dos elementos da base por um número finito de aplicações do passo recursivo.

Objetivo: limitar as operações possíveis sobre conjuntos na especificação de linguagens.

Exemplo 1

A linguagem das palavras contendo a subpalavra bb é regular sobre $\Sigma = \{a, b\}$.

Prova:

- ▶ BASE: $\{a\}$ e $\{b\}$ são regulares, por definição.
- ▶ Aplicando o fecho de Kleene e união:
 - ▶ $\{a, b\}^*$ é regular.
 - ▶ $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$ é regular.
- ▶ Por concatenação: $\{b\}\{b\} = \{bb\}$ é regular.
- ▶ Portanto: $\{a, b\}^*\{bb\}\{a, b\}^*$ é regular.

Exemplo 2

A linguagem das palavras que começam e terminam por a e têm pelo menos um b é regular sobre $\Sigma = \{a, b\}$.

Prova:

- ▶ É fácil, porém trabalhoso, chegar no resultado:

$$\{a\}\{a, b\}^*\{b\}\{a, b\}^*\{a\}$$

Observação

- ▶ Voltemos ao exemplo da linguagem das palavras de tamanho ímpar, que mostramos ao final do exemplo 4, acima.
- ▶ Apesar de termos dado uma definição que usa o operador de diferença de conjuntos, também apresentamos outra que usa apenas união, concatenação e fecho de Kleene.
- ▶ Portanto aquela linguagem é regular!

Licença

- ▶ Slides feitos em $\text{\LaTeX}$ usando beamer e tikz, editados com vim.
- ▶ Licença

Creative Commons Atribuição-Uso Não-Comercial-Vedada a Criação de Obras Derivadas 2.5 Brasil License.<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/br/>

Creative Commons Atribuição-Uso Não-Comercial-Vedada a Criação de Obras Derivadas 2.5 Brasil License.<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/br/>