

ITC: Introdução à Teoria da Computação

Marcos Castilho

DInf/UFPR

13 de maio de 2021

Breve revisão

- ▶ Vimos como especificar de maneira finita um tipo especial de linguagem: as linguagens regulares
- ▶ Elas podem ser definidas em termos de operações especiais sobre conjuntos
- ▶ Estas linguagens podem ser **representadas** por expressões regulares
- ▶ Veremos agora como **reconhecer** estas linguagens

Autômatos Finitos

- ▶ O Objetivo é determinar quando uma palavra está em uma linguagem.
- ▶ Como? Usando uma máquina, ou um modelo abstrato de uma máquina que vai “computar”, através de um procedimento, a entrada e dizer SIM ou NÃO.

Máquina de estados finitos

- ▶ Estudaremos o processo de computação por uma descrição das operações internas da máquina, independentemente do hardware.
- ▶ Inicialmente, nosso modelo não tem memória.

Exemplo: máquina de jornal

Entrada: moedas de 5, 10 e 25 centavos.

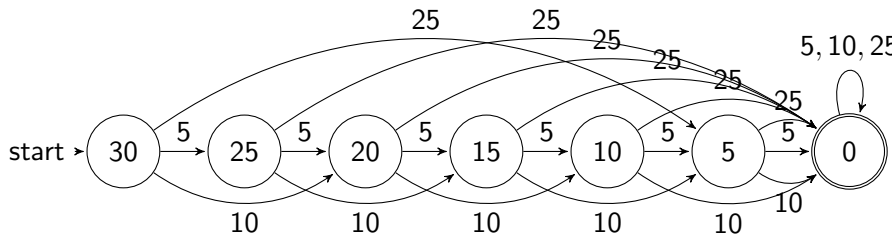
Saída: libera o jornal quando 30 centavos ou mais tiverem sido depositados na máquina.

Estados:

- ▶ Faltam 30
- ▶ Faltam 25
- ▶ Faltam 20
- ▶ Faltam 15
- ▶ Faltam 10
- ▶ Faltam 5
- ▶ Faltam 0

Transições: a máquina muda de estado após cada moeda inserida.
Inicialmente faltam 30 centavos.

Diagrama de transições



Convenções

- ▶ Um grafo dirigido rotulado representa a máquina.
- ▶ Os nodos são os estados, as arestas são as transições.
- ▶ O estado inicial é representado por uma flexa entrando.
- ▶ O estado final é por um círculo duplo.
- ▶ As entradas são palavras de $\Sigma = \{5, 10, 25\}$.
- ▶ As palavras aceitas são as que somam 30 ou mais.

Exemplos:

10 5 10 5 é aceita.

5 5 10 5 não é aceita.

Autômatos Finitos Determinísticos (AFD)

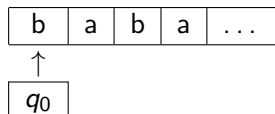
Definição: Um Autômato Finito Determinístico (AFD) é uma quintupla $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ onde:

- ▶ Q : conjunto finito de estados;
- ▶ Σ : conjunto finito de símbolos, é o alfabeto;
- ▶ $q_0 \in Q$: é o estado inicial;
- ▶ $F \subseteq Q$ é o conjunto de estados finais;
- ▶ $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$: é a função (total) de transição.

Funcionamento do AFD

- ▶ Uma máquina com um único registrador, que pode armazenar o estado atual da máquina;
- ▶ Um cabeçote que pode ler um símbolo de uma fita de entrada e se mover para a direita;
- ▶ Uma fita de entrada, infinita, que contém células que podem conter um único símbolo cada;
- ▶ Inicialmente, a palavra a ser processada é colocada na fita, um símbolo em cada célula;
- ▶ O cabeçote está posicionado na primeira célula da fita, aquela que contém o primeiro símbolo da palavra, e a máquina está no estado inicial.

Autômatos Finitos Determinísticos



A cada símbolo lido pelo cabeçote, este se move à direita, a máquina muda de estado em função do estado atual e do símbolo lido.

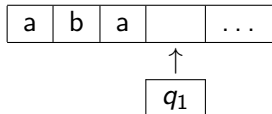
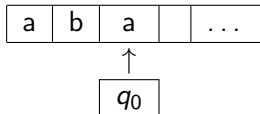
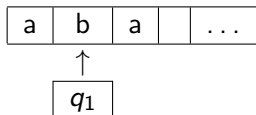
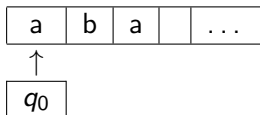
Este processo se repete até o cabeçote encontrar um símbolo em branco.

Neste ponto, se o estado da máquina é um estado final, a palavra é aceita, senão é rejeitada.

Exemplo

$$M : Q = \{q_0, q_1\}; \Sigma = \{a, b\}; F = \{q_1\};$$

$$\delta(q_0, a) = q_1; \delta(q_0, b) = q_0; \delta(q_1, a) = q_1; \delta(q_1, b) = q_0;$$



Como $q_1 \in F$, então aba é aceita por este AFD.

Definição

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFD.

- ▶ A linguagem de M , $L(M)$, é o conjunto de palavras em Σ^* aceitas por M .

Observações

- ▶ Um AFD é um reconhecedor de linguagens.
- ▶ Dois AFD's que aceitam a mesma linguagem são equivalentes.

Configuração instantânea

- ▶ Uma configuração instantânea da máquina é o par ordenado constituído do estado atual e da subpalavra não processada $[q_i, w]$, $q_i \in Q$, $w \in \Sigma^*$.
- ▶ Um ciclo de instrução transforma uma configuração em outra. Seja $a \in \Sigma$:

$$[q_i, aw] \vdash_M [q_j, w]$$

indica que a configuração $[q_j, w]$ foi obtida de $[q_i, aw]$ por um ciclo de instrução de M , desde que $\delta(q_i, a) = q_j$.

Definição

A função $\vdash_M: Q \times \Sigma^+ \rightarrow Q \times \Sigma^*$ é definida por $[q_i, aw] \vdash_M [\delta(q_i, a), w]$, para $a \in \Sigma, w \in \Sigma^*$, onde δ é a função de transição do AFD M .

Notação: $[q_i, u] \vdash^* [q_j, v]$, indica que a configuração $[q_j, v]$ pode ser obtida de $[q_i, u]$ por zero ou mais transições.

Quando não houver dúvida de qual máquina está sendo referida, o M sob o símbolo $\vdash$ poderá ser omitido.

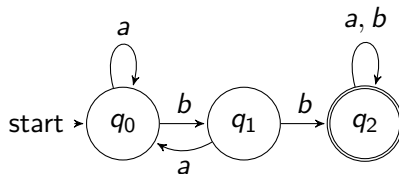
Exemplo

Um AFD que aceita o conjunto de palavras sobre $\{a, b\}$ que contêm a subpalavra bb .

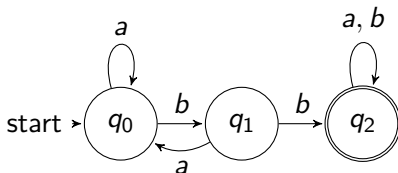
$$L(M) = (a + b)^* bb(a + b)^*.$$

$$M : Q = \{q_0, q_1, q_2\}; \Sigma = \{a, b\}; F = \{q_2\}.$$

δ	a	b
q_0	q_0	q_1
q_1	q_0	q_2
q_2	q_2	q_2



Exemplo (continuação)



$[q_0, abba] \vdash [q_0, bba] \vdash [q_1, ba] \vdash [q_2, a] \vdash [q_2, \lambda]$

Como $q_2 \in F$, então $abba \in L(M)$.

$[q_0, abab] \vdash [q_0, bab] \vdash [q_1, ab] \vdash [q_0, b] \vdash [q_1, \lambda]$

Como $q_1 \notin F$, então $abab \notin L(M)$.

Definição

A função de transição estendida $\hat{\delta}$ de um AFD, com função de transição δ , é uma função de $Q \times \Sigma^*$ em Q definida recursivamente assim:

- ▶ BASE: $|w| = 0$. Então $w = \lambda$ e $\hat{\delta}(q_i, \lambda) = q_i$. Para o caso de $|w| = 1$, então $w = a$, $a \in \Sigma$ e $\hat{\delta}(q_i, a) = \delta(q_i, a)$.
- ▶ PASSO: Seja w uma palavra tal que $|w| \geq 1$. Então $w = ua$ e $\hat{\delta}(q_i, ua) = \delta(\hat{\delta}(q_i, u), a)$.

Assim, $\hat{\delta}(q_0, w)$ simula aplicações repetidas de δ no processamento de w .

A linguagem de M é então:

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F\}.$$

Diagrama de estados

Definição: O diagrama de estados do AFD $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ é o grafo dirigido rotulado G definido assim:

- ▶ $G = (V, E, L)$;
- ▶ $V = Q$;
- ▶ $L \subseteq \Sigma$;
- ▶ q_0 é desenhado como um vértice dentro de um círculo com uma flexa entrando;
- ▶ $q_i \in F$ é desenhado como um vértice dentro de um círculo duplo;
- ▶ $(q_i, q_j) \in E$, rotulado $a \iff \delta(q_i, a) = q_j$;
- ▶ $\forall q_i \in Q, \forall a \in \Sigma$, existe um único arco rotulado a deixando q_i .

Teorema

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFD.

Seja $w \in \Sigma^*$.

Então w determina um único caminho p_w no diagrama de estados de M e $\hat{\delta}(q_0, w) = q_w$.

Prova por indução no tamanho da palavra

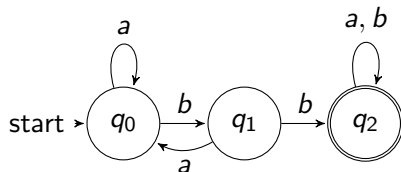
- ▶ BASE: Se $|w| = 0$ então $\hat{\delta}(q_0, w) = q_0$. O caminho correspondente é vazio, começa e termina em q_0 .
- ▶ HI: Suponha que o teorema vale para palavras de tamanho n ou menos, $n \geq 0$.
- ▶ PASSO: Seja $w = ua$ uma palavra de tamanho $n + 1$. Logo, por HI, existe um único caminho p_u que leva de q_0 a q_u , com $\hat{\delta}(q_0, u) = q_u$.
- ▶ Construimos o caminho até w seguindo o arco rotulado a que sai de q_u . Este arco é único (por construção) e isto garante que o caminho de q_0 a q_u é único, com $\hat{\delta}(q_0, w) = \delta(\hat{\delta}(q_0, u), a) = \delta(q_u, a) = q_w$.

Exemplo

$(a + b)^*bb(a + b)^*$, das palavras sobre $\{a, b\}$ que contêm bb .

Solução

$(a + b)^* bb(a + b)^*$, das palavras sobre $\{a, b\}$ que contêm bb .

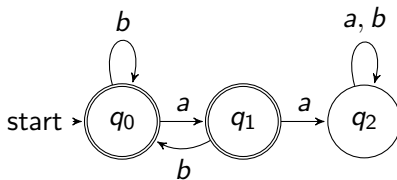


Exemplo 2

$(b + ab)^*(a + \lambda)$, das palavras sobre $\{a, b\}$ que não contém aa .

Solução

$(b + ab)^*(a + \lambda)$, das palavras sobre $\{a, b\}$ que não contém aa .

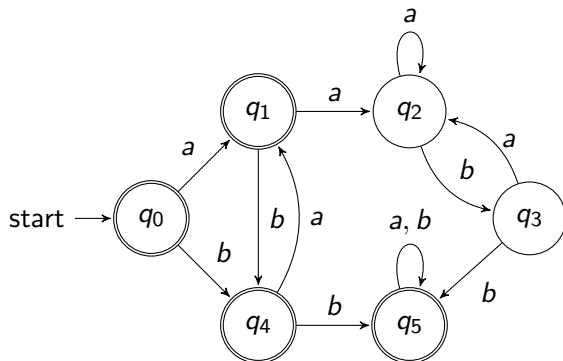


Exemplo 3

$(a + b)^*bb(a + b)^* + (b + ab)^*(a + \lambda)$, das palavras sobre $\{a, b\}$ que contêm bb ou não contém aa .

Solução

$(a + b)^* bb(a + b)^* + (b + ab)^*(a + \lambda)$, das palavras sobre $\{a, b\}$ que contêm bb ou não contém aa .

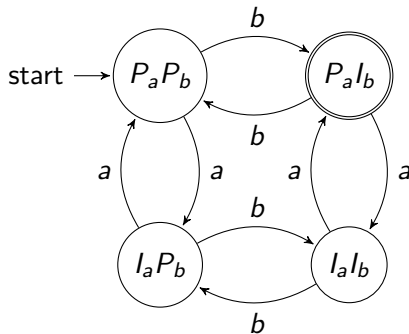


Exemplo 4

Palavras sobre $\{a, b\}$ que contêm um número par de a 's e um número ímpar de b 's.

Solução

Palavras sobre $\{a, b\}$ que contêm um número par de a 's e um número ímpar de b 's.

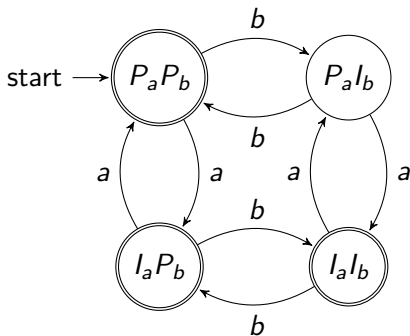


Exemplo 5

Palavras sobre $\{a, b\}$ que não contêm um número par de a 's e um número ímpar de b 's.

Exemplo 5

Palavras sobre $\{a, b\}$ que não contêm um número par de a 's e um número ímpar de b 's.



Teorema

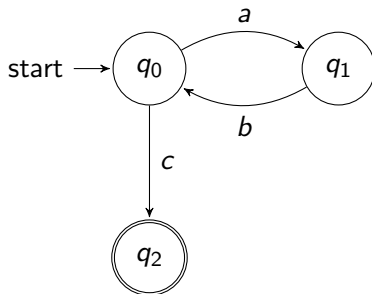
Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFD.

Então $M' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q - F)$ é um AFD com
 $L(M') = \Sigma^* - L(M)$.

Prova

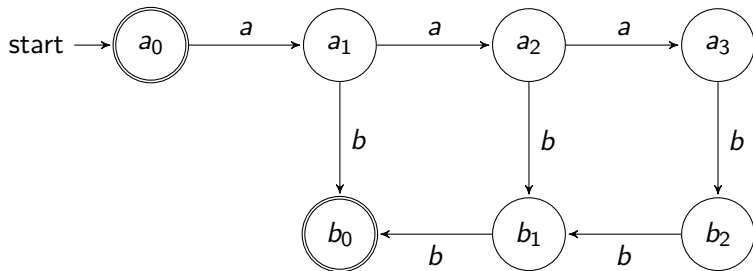
- ▶ Seja $w \in \Sigma^*$ e $\hat{\delta}$ a função de transição extendida construída a partir de δ .
- ▶ Para cada $w \in L(M)$, $\hat{\delta}(q_0, w) \in F$ e assim $w \in L(M')$.
- ▶ Por outro lado, se $w \notin L(M)$, então $\hat{\delta}(q_0, w) \in Q - F$ e assim $w \notin L(M')$.

Exemplo 6: determinismo incompleto



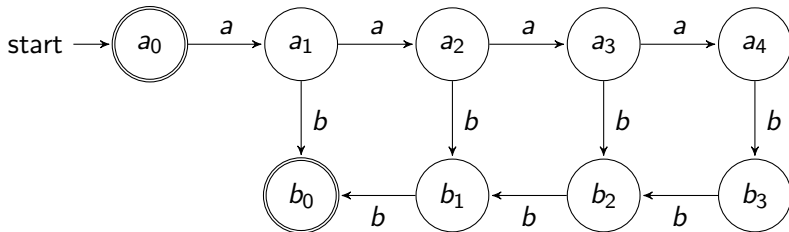
- ▶ Cada configuração tem no máximo uma ação especificada.
- ▶ As transições são funções parciais de $Q \times \Sigma$ em Q .
- ▶ Uma computação falha quando a máquina não consegue processar a palavra que é portanto rejeitada.

Exemplo 7a



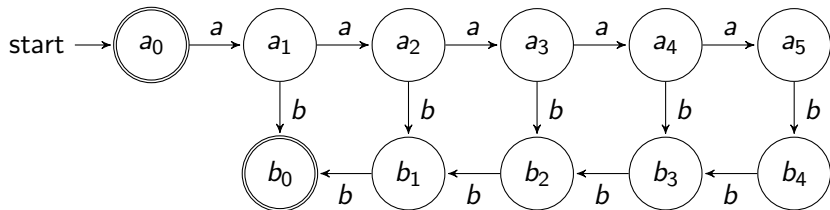
- Este AFD aceita a linguagem $\{a^n b^n \mid n \leq 3\}$.

Exemplo 7b



- Este AFD aceita a linguagem $\{a^n b^n \mid n \leq 4\}$.

Exemplo 7c



- ▶ Este AFD aceita a linguagem $\{a^n b^n \mid n \leq 5\}$.

Atenção!

- ▶ Não existe AFD que aceite a linguagem $\{a^n b^n, n \geq 0\}$.
- ▶ Mas, se n for *fixo*, então é possível construir um AFD que reconhece a linguagem.

Licença

- ▶ Slides feitos em $\text{\LaTeX}$ usando beamer e tikz, editados com vim.
- ▶ Licença

Creative Commons Atribuição-Uso Não-Comercial-Vedada a Criação de Obras Derivadas 2.5 Brasil License.<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/br/>

Creative Commons Atribuição-Uso Não-Comercial-Vedada a Criação de Obras Derivadas 2.5 Brasil License.<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/br/>