ITC: Introdução à Teoria da Computação

Marcos Castilho

DInf/UFPR

19 de maio de 2021

Minimização de AFD's

Definição:
Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFD. Os estados q_i e q_j são equivalentes se:

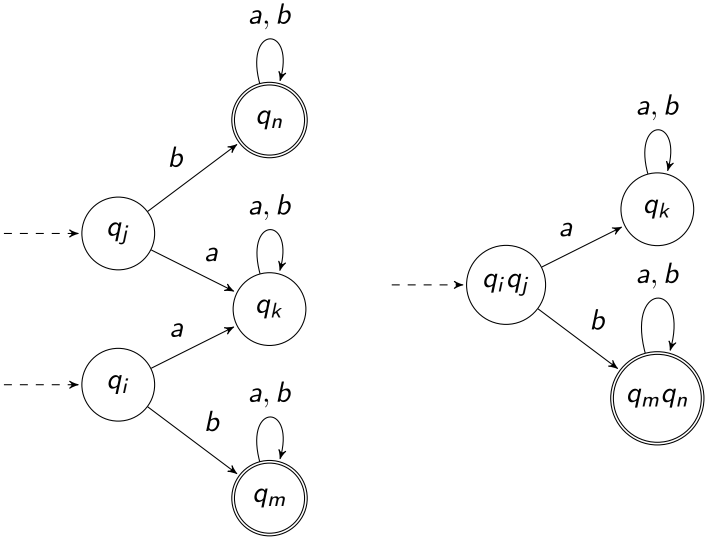
$$\hat{\delta}(q_i, u) \in F \Longleftrightarrow \hat{\delta}(q_j, u) \in F, \forall u \in \Sigma^*$$

Dois estados equivalentes são indistinguíveis.

Equivalência de estados

A relação definida é uma relação de equivalência, isto é, a relação tem as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.
Dois estados equivalentes são indistinguíveis.

Visualização da propriedade



Algoritmo: encontra estados equivalentes, parte 1

Entrada: AFD M $= (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

FOR todo par q_i e q_j, $i < j$ DO
    $D[i,j] := 0$
    $S[i,j] := \{\}$ (conj. vazio)
END

FOR todo par i e j, $i < j$ DO
    IF $q_i \in F$ e $q_j \notin F$, ou vice-e-versa THEN
    $D[i,j] := 1$
END

FOR todo par i e j, $i < j$, com $D[i,j] = 0$ DO

IF $\exists a \in \Sigma \mid (\delta(q_i, a) = q_m$ E $\delta(q_j, a) = q_n)$ E

$(D[m,n] = 1$ OU $D[n,m] = 1)$ THEN $DIST(i,j)$

ELSE FOR cada $a \in \Sigma$ DO

Sejam $\delta(q_i, a) = q_m$ e $\delta(q_j, a) = q_n$

IF $m < n$ e $[i,j] \neq [m,n]$ THEN

Adiciona $[i,j]$ em $S[m,n]$

ELSE IF $m > n$ e $[i,j] \neq [n,m]$ THEN

Adiciona $[i,j]$ em $S[n,m]$.

END

$DIST(i,j)$

BEGIN

$D[i,j] := 1$

FOR todo $[m,n] \in S[i,j]$, $DIST(m,n)$

END

Teorema

Os estados q_i e q_j são distinguíveis se, e somente se, $D[i, j] = 1$ ao fim do algoritmo.
Prova: pag. 185 Sudkamp.

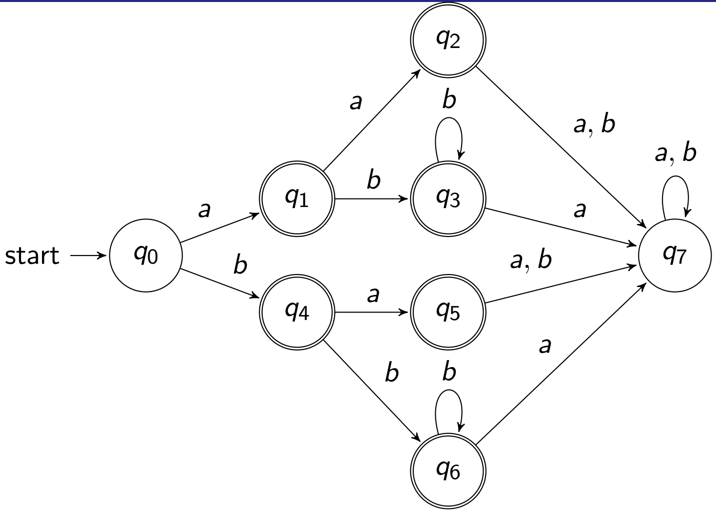
Construção do AFD mínimo

Dado o AFD $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Os estados de M' são as classes de equivalência que são constituídas pelos estados indistinguíveis de M.

- O estado inicial é $[q_0]$
- Os estados finais são todos os $[q_i]$ para todo $q_i \in F$
- A função de transição δ' de M' é definida por $\delta'([q_i], a) = [\delta(q_i, a)]$
- $L(M')$ são as palavras cujas computações tem a forma $\hat{\delta}([q_0], u) = [\hat{\delta}(q_i, \lambda)]$, com $q_i \in F$.

Exemplo

Seja o AFD abaixo, que reconhece a linguagem $(a+b)(a+b^*)$:


start
q_0
q_1
q_2
q_3
q_4
q_5
q_6
q_7
a
b
a
b
b
a, b
a
a, b
a
b
b
a
a, b

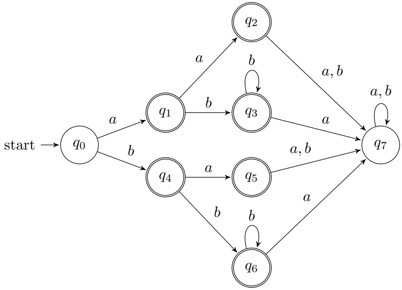
Exemplo

No passo 1:

D	0	1	2	3	4	5	6	7
0		0	0	0	0	0	0	0
1			0	0	0	0	0	0
2				0	0	0	0	0
3					0	0	0	0
4						0	0	0
5							0	0
6								0
7								

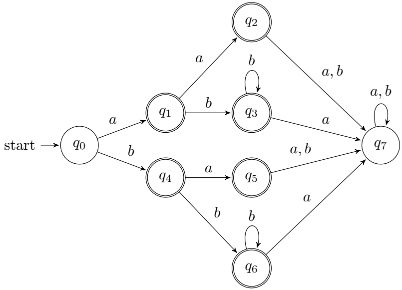
S	0	1	2	3	4	5	6	7
0		{}	{}	{}	{}	{}	{}	{}
1			{}	{}	{}	{}	{}	{}
2				{}	{}	{}	{}	{}
3					{}	{}	{}	{}
4						{}	{}	{}
5							{}	{}
6								{}
7								

Passo 2, $D[i,j] = 1$ quando um é estado final e o outro não



D	0	1	2	3	4	5	6	7
0		1	1	1	1	1	1	0
1			0	0	0	0	0	1
2				0	0	0	0	1
3					0	0	0	1
4						0	0	1
5							0	1
6								1
7								

Passo 3, verifica par $[0, 7]$ com símbolo a



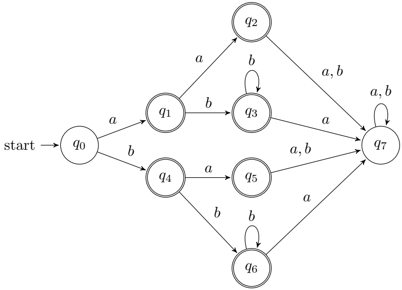
- $\delta(q_0, a) = q_1 \in F$ e $\delta(q_7, a) = q_7 \notin F$
- Como $D[1, 7] = 1$ então são q_0 e q_7 são distinguíveis
- Então faz $D[0, 7] = 1$ e propaga para o conjunto S
- Mas neste momento $S[0, 7] = \{\}$ então não faz mais nada
- Para este par não precisa testar com b, pois já encontrou a

Atualizando as tabelas

D	0	1	2	3	4	5	6	7
0		1	1	1	1	1	1	1
1			0	0	0	0	0	1
2				0	0	0	0	1
3					0	0	0	1
4						0	0	1
5							0	1
6								1
7								

S	0	1	2	3	4	5	6	7
0		{}	{}	{}	{}	{}	{}	{}
1			{}	{}	{}	{}	{}	{}
2				{}	{}	{}	{}	{}
3					{}	{}	{}	{}
4						{}	{}	{}
5							{}	{}
6								{}
7								

Passo 3, verifica par $[1,2]$ com símbolo a



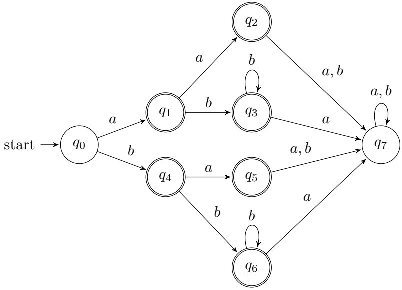
- $\delta(q_1, a) = q_2 \in F$ e $\delta(q_2, a) = q_7 \notin F$
- Como $D[2,7] = 1$ então são q_1 e q_2 são distinguíveis
- Então faz $D[1,2] = 1$ e propaga para o conjunto S
- Mas neste momento $S[1,2] = \{\}$ então não faz mais nada
- Para este par não precisa testar com b, pois já encontrou a

Atualizando as tabelas

D	0	1	2	3	4	5	6	7
0		1	1	1	1	1	1	1
1			1	0	0	0	0	1
2				0	0	0	0	1
3					0	0	0	1
4						0	0	1
5							0	1
6								1
7								

S	0	1	2	3	4	5	6	7
0		{}	{}	{}	{}	{}	{}	{}
1			{}	{}	{}	{}	{}	{}
2				{}	{}	{}	{}	{}
3					{}	{}	{}	{}
4						{}	{}	{}
5							{}	{}
6								{}
7								

Passo 3, verifica par $[1, 3]$ com símbolo a



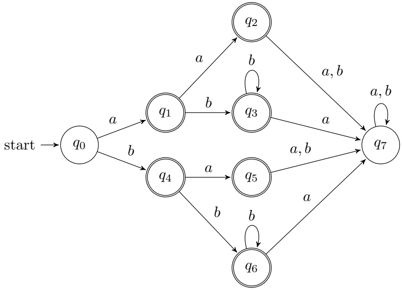
- $\delta(q_1, a) = q_2 \in F$ e $\delta(q_3, a) = q_7 \notin F$
- Como $D[2, 7] = 1$ então são q_1 e q_3 são distinguíveis
- Então faz $D[1, 3] = 1$ e propaga para o conjunto S
- Mas neste momento $S[1, 3] = \{\}$ então não faz mais nada
- Para este par não precisa testar com b, pois já encontrou a

Atualizando as tabelas

D	0	1	2	3	4	5	6	7
0		1	1	1	1	1	1	1
1			1	1	0	0	0	1
2				0	0	0	0	1
3					0	0	0	1
4						0	0	1
5							0	1
6								1
7								

S	0	1	2	3	4	5	6	7
0		{}	{}	{}	{}	{}	{}	{}
1			{}	{}	{}	{}	{}	{}
2				{}	{}	{}	{}	{}
3					{}	{}	{}	{}
4						{}	{}	{}
5							{}	{}
6								{}
7								

Passo 3, verifica par $[1, 4]$



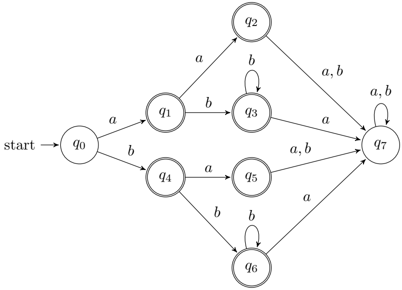
- $\delta(q_1, a) = q_2 \in F$ e $\delta(q_4, a) = q_5 \in F$
- $\delta(q_1, b) = q_3 \in F$ e $\delta(q_4, b) = q_6 \in F$
- Logo, estes estados são **indistinguíveis**, cai no else do algoritmo
- Deve-se adicionar $[1, 4]$ em $S[2, 5]$, por causa de a
- Deve-se adicionar $[1, 4]$ em $S[3, 6]$, por causa de b

Atualizando as tabelas

D	0	1	2	3	4	5	6	7
0		1	1	1	1	1	1	1
1			1	1	0	0	0	1
2				0	0	0	0	1
3					0	0	0	1
4						0	0	1
5							0	1
6								1
7								

S	0	1	2	3	4	5	6	7
0		{}	{}	{}	{}	{}	{}	{}
1			{}	{}	{}	{}	{}	{}
2				{}	{}	{[1, 4]}	{}	{}
3					{}	{}	{[1, 4]}	{}
4						{}	{}	{}
5							{}	{}
6								{}
7								

Passo 3, verifica par $[1, 5]$ com símbolo a



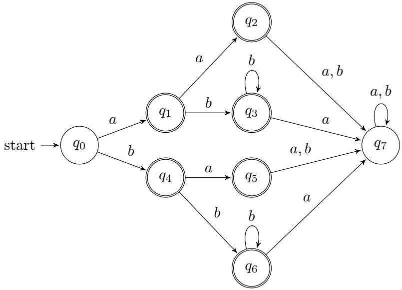
- $\delta(q_1, a) = q_2 \in F$ e $\delta(q_5, a) = q_7 \notin F$
- Como $D[2, 7] = 1$ então são q_1 e q_5 são distinguíveis
- Então faz $D[1, 5] = 1$ e propaga para o conjunto S
- Mas neste momento $S[1, 5] = \{\}$ então não faz mais nada
- Para este par não precisa testar com b, pois já encontrou a

Atualizando as tabelas

D	0	1	2	3	4	5	6	7
0		1	1	1	1	1	1	1
1			1	1	0	1	0	1
2				0	0	0	0	1
3					0	0	0	1
4						0	0	1
5							0	1
6								1
7								

S	0	1	2	3	4	5	6	7
0		$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$
1			$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$
2				$\{\}$	$\{\}$	$\{[1,4]\}$	$\{\}$	$\{\}$
3					$\{\}$	$\{\}$	$\{[1,4]\}$	$\{\}$
4						$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$
5							$\{\}$	$\{\}$
6								$\{\}$
7								

Passo 3, verifica par $[1, 6]$ com símbolo a



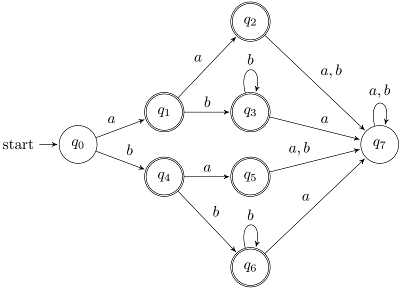
- $\delta(q_1, a) = q_2 \in F$ e $\delta(q_6, a) = q_7 \notin F$
- Como $D[2, 7] = 1$ então são q_1 e q_6 são distinguíveis
- Então faz $D[1, 6] = 1$ e propaga para o conjunto S
- Mas neste momento $S[1, 6] = \{\}$ então não faz mais nada
- Para este par não precisa testar com b, pois já encontrou a

Atualizando as tabelas

D	0	1	2	3	4	5	6	7
0		1	1	1	1	1	1	1
1			1	1	0	1	1	1
2				0	0	0	0	1
3					0	0	0	1
4						0	0	1
5							0	1
6								1
7								

S	0	1	2	3	4	5	6	7
0		{}	{}	{}	{}	{}	{}	{}
1			{}	{}	{}	{}	{}	{}
2				{}	{}	{[1, 4]}	{}	{}
3					{}	{}	{[1, 4]}	{}
4						{}	{}	{}
5							{}	{}
6								{}
7								

Passo 3, verifica par $[2, 3]$ com símbolo b



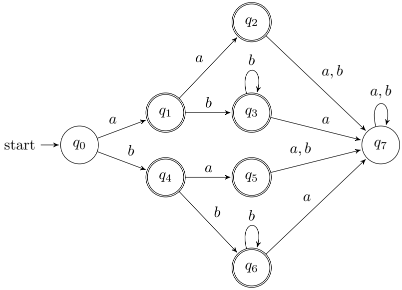
- $\delta(q_2, b) = q_7 \notin F$ e $\delta(q_3, b) = q_3 \in F$
- Como $D[3, 7] = 1$ então são q_2 e q_3 são distinguíveis
- Então faz $D[2, 3] = 1$ e propaga para o conjunto S
- Mas neste momento $S[2, 3] = \{\}$ então não faz mais nada
- Para este par não precisa testar com a, pois já encontrou b

Atualizando as tabelas

D	0	1	2	3	4	5	6	7
0		1	1	1	1	1	1	1
1			1	1	0	1	1	1
2				1	0	0	0	1
3					0	0	0	1
4						0	0	1
5							0	1
6								1
7								

S	0	1	2	3	4	5	6	7
0		{}	{}	{}	{}	{}	{}	{}
1			{}	{}	{}	{}	{}	{}
2				{}	{}	{[1, 4]}	{}	{}
3					{}	{}	{[1, 4]}	{}
4						{}	{}	{}
5							{}	{}
6								{}
7								

Passo 3, verifica par $[2, 4]$ com símbolo *a*



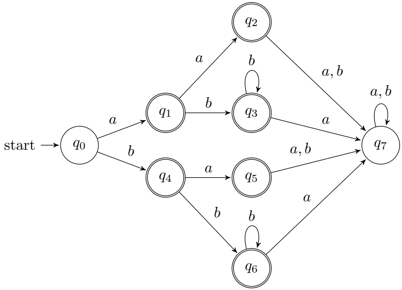
- $\delta(q_2, a) = q_7 \notin F$ e $\delta(q_4, a) = q_5 \in F$
- Como $D[5, 7] = 1$ então são q_2 e q_4 são distinguíveis
- Então faz $D[2, 4] = 1$ e propaga para o conjunto S
- Mas neste momento $S[2, 4] = \{\}$ então não faz mais nada
- Para este par não precisa testar com *b*, pois já encontrou *a*

Atualizando as tabelas

D	0	1	2	3	4	5	6	7
0		1	1	1	1	1	1	1
1			1	1	0	1	1	1
2				1	1	0	0	1
3					0	0	0	1
4						0	0	1
5							0	1
6								1
7								

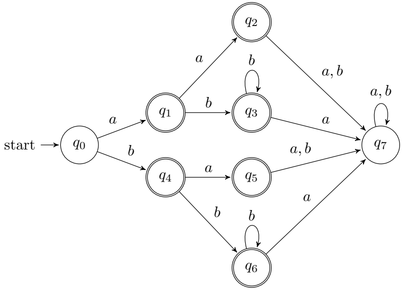
S	0	1	2	3	4	5	6	7
0		{}	{}	{}	{}	{}	{}	{}
1			{}	{}	{}	{}	{}	{}
2				{}	{}	{[1, 4]}	{}	{}
3					{}	{}	{[1, 4]}	{}
4						{}	{}	{}
5							{}	{}
6								{}
7								

Passo 3, verifica par $[2, 5]$



- $\delta(q_2, a) = q_7 \notin F$ e $\delta(q_5, a) = q_7 \in F$
- $\delta(q_2, b) = q_7 \notin F$ e $\delta(q_5, b) = q_7 \in F$
- Como $D[7, 7]$ não está definido, não faz nada aqui

Passo 3, verifica par $[2, 6]$ com símbolo b



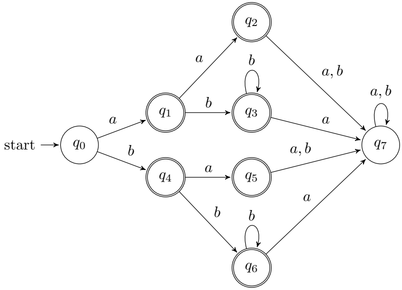
- $\delta(q_2, b) = q_7 \notin F$ e $\delta(q_6, b) = q_6 \in F$
- Como $D[6, 7] = 1$ então são q_2 e q_6 são distinguíveis
- Então faz $D[2, 6] = 1$ e propaga para o conjunto S
- Mas neste momento $S[2, 6] = \{\}$ então não faz mais nada
- Para este par não precisa testar com a, pois já encontrou b

Atualizando as tabelas

D	0	1	2	3	4	5	6	7
0		1	1	1	1	1	1	1
1			1	1	0	1	1	1
2				1	1	0	1	1
3					0	0	0	1
4						0	0	1
5							0	1
6								1
7								

S	0	1	2	3	4	5	6	7
0		{}	{}	{}	{}	{}	{}	{}
1			{}	{}	{}	{}	{}	{}
2				{}	{}	{[1, 4]}	{}	{}
3					{}	{}	{[1, 4]}	{}
4						{}	{}	{}
5							{}	{}
6								{}
7								

Passo 3, verifica par $[3, 4]$ com símbolo a



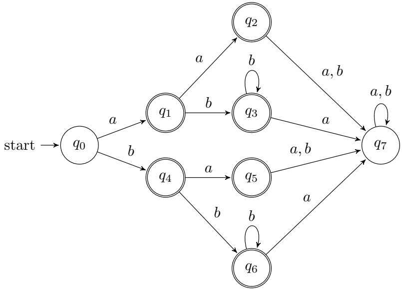
- $\delta(q_3, a) = q_7 \notin F$ e $\delta(q_4, a) = q_5 \in F$
- Como $D[5, 7] = 1$ então são q_3 e q_4 são distinguíveis
- Então faz $D[3, 4] = 1$ e propaga para o conjunto S
- Mas neste momento $S[3, 4] = \{\}$ então não faz mais nada
- Para este par não precisa testar com b, pois já encontrou a

Atualizando as tabelas

D	0	1	2	3	4	5	6	7
0		1	1	1	1	1	1	1
1			1	1	0	1	1	1
2				1	1	0	1	1
3					1	0	0	1
4						0	0	1
5							0	1
6								1
7								

S	0	1	2	3	4	5	6	7
0		{}	{}	{}	{}	{}	{}	{}
1			{}	{}	{}	{}	{}	{}
2				{}	{}	{[1, 4]}	{}	{}
3					{}	{}	{[1, 4]}	{}
4						{}	{}	{}
5							{}	{}
6								{}
7								

Passo 3, verifica par $[3, 5]$ com símbolo b



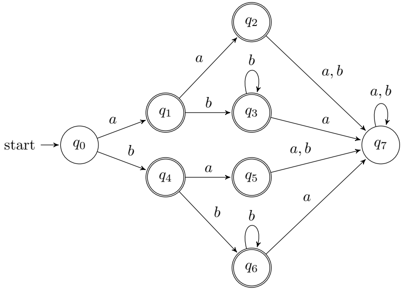
- $\delta(q_3, b) = q_3 \in F$ e $\delta(q_5, b) = q_7 \notin F$
- Como $D[3, 7] = 1$ então são q_3 e q_5 são distinguíveis
- Então faz $D[3, 5] = 1$ e propaga para o conjunto S
- Mas neste momento $S[3, 5] = \{\}$ então não faz mais nada
- Para este par não precisa testar com a, pois já encontrou b

Atualizando as tabelas

D	0	1	2	3	4	5	6	7
0		1	1	1	1	1	1	1
1			1	1	0	1	1	1
2				1	1	0	1	1
3					1	1	0	1
4						0	0	1
5							0	1
6								1
7								

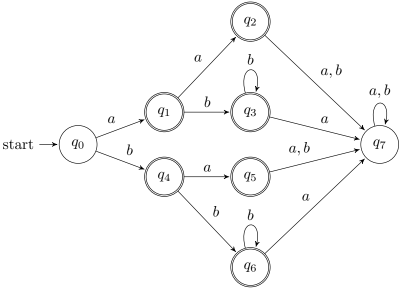
S	0	1	2	3	4	5	6	7
0		{}	{}	{}	{}	{}	{}	{}
1			{}	{}	{}	{}	{}	{}
2				{}	{}	{[1, 4]}	{}	{}
3					{}	{}	{[1, 4]}	{}
4						{}	{}	{}
5							{}	{}
6								{}
7								

Passo 3, verifica par $[3, 6]$



- $\delta(q_3, a) = q_7 \notin F$ e $\delta(q_6, a) = q_7 \notin F$
- $\delta(q_3, b) = q_3 \in F$ e $\delta(q_6, b) = q_6 \in F$
- Como $D[7, 7]$ não está definido, não faz nada aqui

Passo 3, verifica par $[4, 5]$ com símbolo a



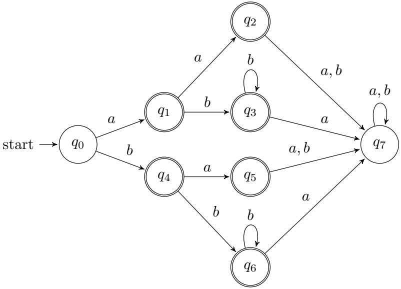
- $\delta(q_4, a) = q_5 \in F$ e $\delta(q_5, a) = q_7 \notin F$
- Como $D[5, 7] = 1$ então são q_4 e q_5 são distinguíveis
- Então faz $D[4, 5] = 1$ e propaga para o conjunto S
- Mas neste momento $S[4, 5] = \{\}$ então não faz mais nada
- Para este par não precisa testar com b, pois já encontrou a

Atualizando as tabelas

D	0	1	2	3	4	5	6	7
0		1	1	1	1	1	1	1
1			1	1	0	1	1	1
2				1	1	0	1	1
3					1	1	0	1
4						1	0	1
5							0	1
6								1
7								

S	0	1	2	3	4	5	6	7
0		{}	{}	{}	{}	{}	{}	{}
1			{}	{}	{}	{}	{}	{}
2				{}	{}	{[1, 4]}	{}	{}
3					{}	{}	{[1, 4]}	{}
4						{}	{}	{}
5							{}	{}
6								{}
7								

Passo 3, verifica par $[4, 6]$ com símbolo a



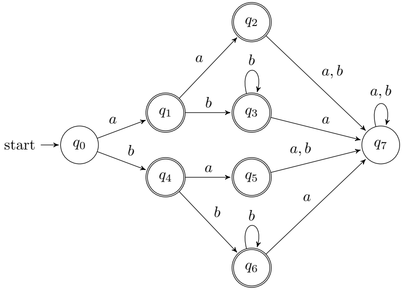
- $\delta(q_4, a) = q_5 \in F$ e $\delta(q_6, a) = q_7 \notin F$
- Como $D[5, 7] = 1$ então são q_4 e q_6 são distinguíveis
- Então faz $D[4, 6] = 1$ e propaga para o conjunto S
- Mas neste momento $S[4, 6] = \{\}$ então não faz mais nada
- Para este par não precisa testar com b, pois já encontrou a

Atualizando as tabelas

D	0	1	2	3	4	5	6	7
0		1	1	1	1	1	1	1
1			1	1	0	1	1	1
2				1	1	0	1	1
3					1	1	0	1
4						1	1	1
5							0	1
6								1
7								

S	0	1	2	3	4	5	6	7
0		$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$
1			$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$
2				$\{\}$	$\{\}$	$\{[1,4]\}$	$\{\}$	$\{\}$
3					$\{\}$	$\{\}$	$\{[1,4]\}$	$\{\}$
4						$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$
5							$\{\}$	$\{\}$
6								$\{\}$
7								

Passo 3, verifica par $[5, 6]$ com símbolo b



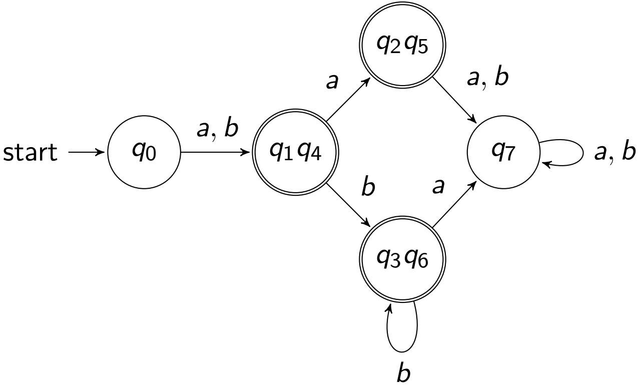
- $\delta(q_5, b) = q_7 \notin F$ e $\delta(q_6, b) = q_6 \in F$
- Como $D[6, 7] = 1$ então são q_5 e q_6 são distinguíveis
- Então faz $D[5, 6] = 1$ e propaga para o conjunto S
- Mas neste momento $S[5, 6] = \{\}$ então não faz mais nada
- Para este par não precisa testar com a, pois já encontrou b

Atualizando as tabelas

D	0	1	2	3	4	5	6	7
0		1	1	1	1	1	1	1
1			1	1	0	1	1	1
2				1	1	0	1	1
3					1	1	0	1
4						1	1	1
5							1	1
6								1
7								

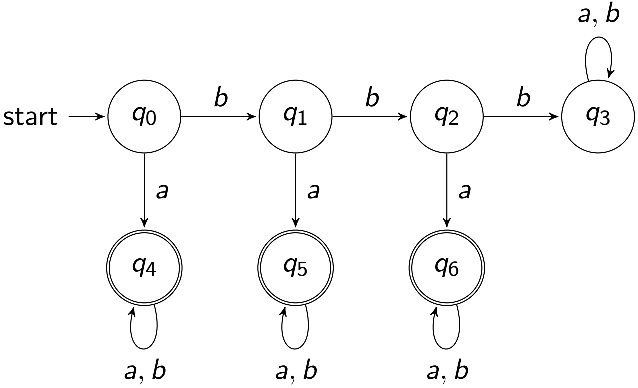
S	0	1	2	3	4	5	6	7
0		{}	{}	{}	{}	{}	{}	{}
1			{}	{}	{}	{}	{}	{}
2				{}	{}	{[1, 4]}	{}	{}
3					{}	{}	{[1, 4]}	{}
4						{}	{}	{}
5							{}	{}
6								{}
7								

AFD resultante



Exemplo 2

Seja o AFD abaixo, que reconhece a linguagem $a(a+b)^* + ba(a+b)^* + bba(a+b)^*$:



Exemplo 2, continuação

No passo 2:

- $D[0,4] = D[0,5] = D[0,6] = 1$
- $D[1,4] = D[1,5] = D[1,6] = 1$
- $D[2,4] = D[2,5] = D[2,6] = 1$
- $D[3,4] = D[3,5] = D[3,6] = 1$

Exemplo 2, continuação

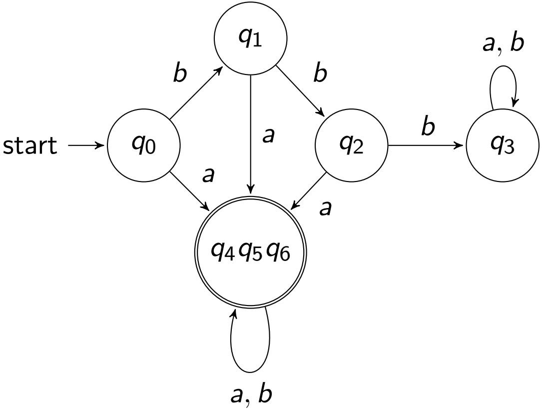
No passo 3:

Índices	Ação	Motivo
$[0,1]$	$S[4,5] = \{[0,1]\}$	
	$S[1,2] = \{[0,1]\}$	
$[0,2]$	$S[4,6] = \{[0,2]\}$	
	$S[1,3] = \{[0,2]\}$	
$[0,3]$	$D[0,3] = 1$	símbolo a
$[1,2]$	$S[5,6] = \{[1,2]\}$	
	$S[2,3] = \{[1,2]\}$	
$[1,3]$	$D[1,3] = 1$	símbolo a
	$D[0,2] = 1$	$DIST(1,3)$
$[2,3]$	$D[2,3] = 1$	símbolo a
	$D[1,2] = 1$	$DIST(1,2)$
	$D[0,1] = 1$	$DIST(0,1)$
$[4,5]$		
$[4,6]$		
$[5,6]$		

Pois em todos os casos $q_i \in F$ e $q_j \notin F$ ou ao contrário.

Exemplo 2, continuação

O AFD resultante é:



Licença

- Slides feitos em LaTeX usando beamer e tikz, editados com vim.
- Licença

  Creative Commons Atribuição-Uso Não-Comercial-Vedada a Criação de Obras Derivadas 2.5 Brasil License.`http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/br/`