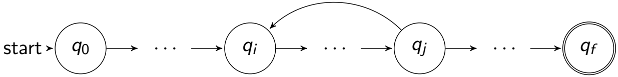
ITC: Introdução à Teoria da Computação

Marcos Castilho

DInf/UFPR

22 de maio de 2021

Motivação



- Sejam $u, v, w \in \Sigma^*$ tais que:
  - u processada entre os estados q_0 até q_j
  - v processada entre os estados q_j até q_j, usando-se a aresta de retorno
  - w processada entre os estados q_j até q_f
- A palavra $uw \in L(M)$
- A palavra $uvw \in L(M)$
- A palavra $uv^2w \in L(M)$
- $\ldots$
- A palavra $uv^iw \in L(M), \forall i \geq 0$

Lema do bombeamento (Pumping lemma)

Teorema:
Seja L uma linguagem regular. Então existe uma constante $k > 0$ tal que, para qualquer palavra $z \in L$ com $|z| \geq k$, existem u, v, w que satisfazem as seguintes condições:

- $z = uvw$
- $|uv| \leq k$
- $v \neq \lambda$
- $uv^i w \in L, \forall i \geq 0$.

Lema do bombeamento (Pumping lemma)

Prova:
Seja M um AFD com n estados que reconheça L. Seja uma palavra arbitrária $z \in L$ tal que $|z| \geq n$. (se não existir o lema vale, por vacuidade).

Seja $c(z)$ o caminho percorrido no grafo para reconhecer z. Como $|z| \geq n$ e $c(z) = |z| + 1$, então $c(z)$ repete um estado.

Seja e este estado que repete. Assim u é a subpalavra que vai de até antes do primeiro e. v é a palavra que vai do primeiro e até o segundo. Finalmente, w é o resto da palavra.

Exemplo

$L = \{a^n b^n \mid n \in N\}$ não é regular.

Exemplo

$L = \{a^n b^n \mid n \in N\}$ não é regular.

Prova:
Suponha que L seja regular. Então seja $k > 0$ a constante do lema do bombeamento. Seja $z = a^k b^k \in L$. Como $|z| \geq k$ o lema diz que

- $z = uvw$
- $|uv| \leq k$
- $v \neq \lambda$
- $uv^i w \in L, \forall i \geq 0.$

Mas v só tem a's, pois $|uv| \leq k$ e v tem pelo menos um a. Logo, $uv^2 w = a^{k+|v|} b^k \notin L$, o que é um absurdo.
Logo, L não é regular.

Técnica para usar o lema

1. A prova sempre será por redução ao absurdo;
2. Suponha que L seja regular;
3. Escolha uma palavra $z \in L$ cujo tamanho seja maior ou igual a k, a constante do lema;
4. Mostrar que sempre que se decompõe z em u, v e w, existe um i tal que $uv^iw \notin L$.

Exemplo

$$L = \{0^m 1^n \mid m > n\}.$$

Exemplo

$L = \{0^m 1^n \mid m > n\}.$

Prova:
Suponha que L seja regular. Então seja k a constante do lema do bombeamento. Seja $z = 0^{k+1}1^k$. Como $|z| > k$ o lema diz que

- $z = uvw$
- $|uv| \leq k$
- $v \neq \lambda$
- $uv^i w \in L, \forall i \geq 0.$

Como $0 < |v| \leq k$ e $v \neq \lambda$, v só contém 0's e v tem no mínimo um 0. Logo
Logo, $uv^0w = 0^{k+1-|v|}1^k \notin L$, o que é um absurdo.
Logo, L não é regular.

Exemplo

$L = \{a^n \mid n \text{ é primo}\}$.

Prova:

Suponha que L seja regular. Então seja k a constante do lema do bombeamento. Seja $z = a^n$ tal que n é um número primo maior do que k. Então

- $z = uvw$
- $|uv| \leq k$
- $v \neq \lambda$
- $uv^iw \in L, \forall i \geq 0$.

Temos que $uv^iw \in L$, para todo $i \geq 0$.
Temos que achar um i que "quebre" o lema. Então basta achar um i tal que a palavra resultante tenha um tamanho que não seja primo!
O i que queremos é $n+1$, pois

$$tamanho(uv^{n+1}w) = tamanho(uvv^nw) = tamanho(uvw) + tamanho(v^n)$$

Logo,

$$tamanho(uv^{n+1}w) = n + n(tamanho(v)) = n(1 + tamanho(v))$$

Como $|v| > 0$, então este número não é primo. Logo, $uv^{n+1}w \notin L$.
Logo, L não é regular.

Exercícios

Prove que não são regulares, usando o lema do bombeamento:

1. $\{0^m 1^n \mid m < n\}$
2. $\{0^n 1^{2^n} \mid n \geq 0\}$
3. $\{0^m 1^n 0^m \mid m, n \geq 0\}$
4. $\{xcx \mid x \in \{a, b\}^*\}$
5. $\{10^n 1^n \mid n \geq 0\}$
6. $\{0^{n^2} \mid n \geq 0\}$

Licença

- Slides feitos em LaTeX usando beamer e tikz, editados com vim.
- Licença

  Creative Commons Atribuição-Uso Não-Comercial-Vedada a Criação de Obras Derivadas 2.5 Brasil License.http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/br/

  Creative Commons Atribuição-Uso Não-Comercial-Vedada a Criação de Obras Derivadas 2.5 Brasil License.http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/br/