

ITC: Introdução à Teoria da Computação

Marcos Castilho

DInf/UFPR

24 de maio de 2021

Gramáticas Livre de Contexto e Linguagens

Definição: Uma Gramática Livre de Contexto (GLC) é uma quadra (V, Σ, P, S) onde:

- ▶ V é um conjunto finito de variáveis;
- ▶ Σ é um conjunto finito de símbolos terminais, e define o alfabeto;
- ▶ P é um conjunto finito de regras;
- ▶ $S \in V$ é o símbolo de partida.

Obs.: $V \cap \Sigma = \emptyset$

Regras

- ▶ Uma regra, ou produção, é um elemento de $V \times (V \cup \Sigma)^*$;
- ▶ $[A, w]$ é escrito $A \rightarrow w$;
- ▶ Diz-se que é uma “regra A”;
- ▶ Como $\lambda \in (V \cup \Sigma)^*$, então existe uma regra chamada de “regra lambda” ($A \rightarrow \lambda$).

Exemplo

- ▶ $G = (V, \Sigma, P, S)$
- ▶ $V = \{S, A\}$
- ▶ $\Sigma = \{a, b\}$
- ▶ $P :$
 - ▶ $S \rightarrow AA \mid \lambda$
 - ▶ $A \rightarrow bA \mid Ab \mid a$

Notação

- ▶ Terminais: usaremos letras minúsculas do início do alfabeto: $a, b, c, d, e, \dots$
- ▶ Variáveis: usaremos letras maiúsculas: $A, B, C, D, E, \dots$
- ▶ Palavras: usaremos letras minúsculas do final do alfabeto: p, q, u, v, w, x, y, z .

Aplicação das regras

Suponha que uma variável A ocorre em uma palavra uAv . A aplicação de $A \rightarrow w$ em uAv produz uwv .

Notação:
 $uAv \Rightarrow uwv$.

Dizemos que u é o *prefixo* da palavra; enquanto que v é o *sufixo*. O prefixo u e o sufixo v definem o *contexto* da palavra.

Derivação (definição informal)

Uma palavra w é *derivável* de v se existe uma sequência finita de aplicações de regras que transformam v em w , isto é:

$$v \Rightarrow w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow w_n = w.$$

Notação:

$$v \xRightarrow{*} w.$$

Definição

Seja $G = (V, \Sigma, P, S)$ uma gramática livre de contexto e $v \in (V \cup \Sigma)^*$. O conjunto de palavras deriváveis de v é assim definido:

Base: v é derivável de v ;

Passo recursivo: Se $u = xAy$ é derivável de v e $A \rightarrow w \in P$, então xwy é derivável de v ;

Fecho: Apenas as palavras construídas a partir de v por um número finito de aplicações do passo recursivo são deriváveis a partir de v .

Observações

- ▶ $\rightarrow$: é uma notação para regra, que é uma relação sobre $V \times (V \cup \Sigma)^*$;
- ▶ $\Rightarrow$: é uma notação para a aplicação de uma regra que transforma uma palavra em outra;
- ▶ $\stackrel{+}{\Rightarrow}$: indica uma derivação que usa uma ou mais aplicações de regras;
- ▶ $\stackrel{n}{\Rightarrow}$: indica uma derivação que usa exatamente n aplicações de regras;
- ▶ $\stackrel{*}{\Rightarrow}_G$: indica uma derivação que usa zero ou mais aplicações de regras usando a gramática G .

Definição

Seja $G = (V, \Sigma, P, S)$ uma Gramática Livre de Contexto.

- ▶ Uma palavra $w \in (V \cup \Sigma)^*$ é uma *forma sentencial* de G se existe uma derivação $S \xRightarrow[G]{*} w$;
- ▶ Uma palavra $w \in \Sigma^*$ é uma *sentença* de G se existe uma derivação $S \xRightarrow[G]{*} w$;
- ▶ A *linguagem* de G , $L(G)$, é o conjunto $\{w \in \Sigma^* \mid S \xRightarrow[G]{*} w\}$.

Definição

Um conjunto de palavras sobre um alfabeto Σ é denominado uma *Linguagem Livre de Contexto* se existe uma Gramática Livre de Contexto que a gera.

Observações

- ▶ Uma regra da forma $A \rightarrow uAv$ é chamada de *diretamente recursiva*;
- ▶ Uma variável A é chamada de *recursiva* se existe uma derivação $A \Rightarrow^+ uAv$;
- ▶ Uma derivação do tipo $A \Rightarrow w \Rightarrow^+ uAv$, onde A não aparece em w é chamada de *indiretamente recursiva*.

Exemplo

Seja L a linguagem das palavras sobre $\{a, b\}$ que têm um número par de a 's. A seguinte gramática G gera L :

- ▶ $G = (G, \Sigma, P, S)$
- ▶ $V = \{S, A\}$
- ▶ $\Sigma = \{a, b\}$
- ▶ $P :$
 - ▶ $S \rightarrow AA \mid \lambda$
 - ▶ $A \rightarrow AAA \mid bA \mid Ab \mid a$

Exemplo: duas derivações diferentes de *ababaa*

$$S \rightarrow AA \text{ — } \lambda$$

$$A \rightarrow AAA \mid bA \mid Ab \mid a$$

Derivação *a*:

$$S \Rightarrow AA$$

$$\Rightarrow aA$$

$$\Rightarrow aAAA$$

$$\Rightarrow abAAA$$

$$\Rightarrow abaAA$$

$$\Rightarrow ababAA$$

$$\Rightarrow ababaA$$

$$\Rightarrow ababaa$$

Derivação *b*:

$$S \Rightarrow AA$$

$$\Rightarrow AAAA$$

$$\Rightarrow aAAA$$

$$\Rightarrow abAAA$$

$$\Rightarrow abaAA$$

$$\Rightarrow ababAA$$

$$\Rightarrow ababaA$$

$$\Rightarrow ababaa$$

Exemplo: outras derivações de *ababaa*

$$S \rightarrow AA$$

$$A \rightarrow AAA \mid bA \mid Ab \mid a$$

Derivação *c*:

$$S \Rightarrow AA$$

$$\Rightarrow Aa$$

$$\Rightarrow AAAa$$

$$\Rightarrow AAbAa$$

$$\Rightarrow AAbaa$$

$$\Rightarrow AbAbaa$$

$$\Rightarrow Ababaa$$

$$\Rightarrow ababaa$$

Derivação *d*:

$$S \Rightarrow AA$$

$$\Rightarrow aA$$

$$\Rightarrow aAAA$$

$$\Rightarrow aAAa$$

$$\Rightarrow abAbAa$$

$$\Rightarrow abAbAa$$

$$\Rightarrow ababAa$$

$$\Rightarrow ababaa$$

Observações

- ▶ A derivação (a) é chamada de “derivação mais à esquerda”;
- ▶ A derivação (c) é chamada de “derivação mais à direita”.

Definição

Seja $G = (V, \Sigma, P, S)$ uma GLC e $S \xRightarrow[G]{*} w$ uma derivação.

A *Árvore de derivação* de $S \xRightarrow[G]{*} w$ é uma árvore ordenada que pode ser assim construída:

1. Inicia-se a árvore com S na raiz;
2. Se $A \rightarrow x_1 x_2 \dots x_n$, com $x_i \in (V \cup \Sigma)$ é uma regra na derivação aplicada na forma sentencial uAv então adicione $x_1, x_2, \dots, x_n$ como filhos de A na árvore;
3. Se $A \rightarrow \lambda$ é uma regra na derivação aplicada na forma sentencial uAv , adicione λ como único filho de A na árvore.

Exemplo

Derivação de *ababaa* :

S

Ordenação: S .

Árvore de derivação

S

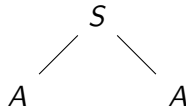
Exemplo

Derivação de *ababaa* :

$$S \Rightarrow AA$$

Ordenação: *A, A*.

Árvore de derivação



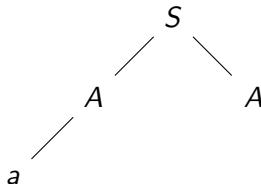
Exemplo

Derivação de *ababaa* :

$AA \Rightarrow aA$

Ordenação: *a, A*.

Árvore de derivação

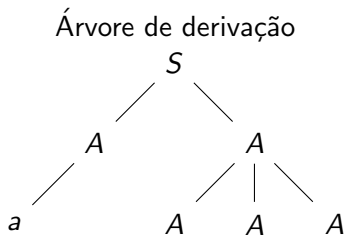


Exemplo

Derivação de *ababaa* :

$aA \Rightarrow aAAA$

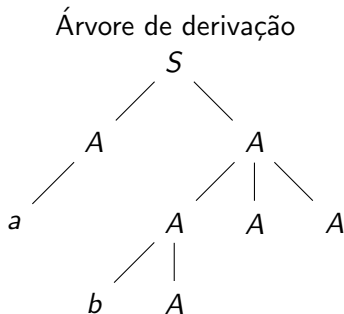
Ordenação: *a, A, A, A*.



Exemplo

Derivação de *ababaa* :
 $aAAA \Rightarrow abAAA$

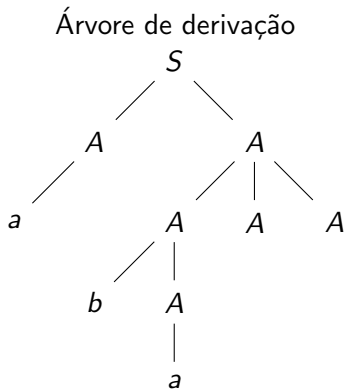
Ordenação: *a, b, A, A, A*.



Exemplo

Derivação de *ababaa* :
abAAA $\Rightarrow$ *abaAA*

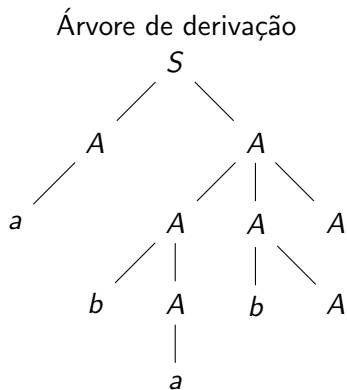
Ordenação: *a, b, a, A, A*.



Exemplo

Derivação de *ababaa* :
abaAA $\Rightarrow$ *ababAA*

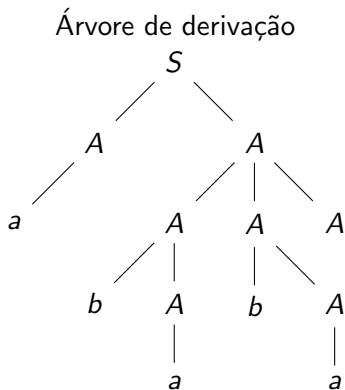
Ordenação: *a, b, a, b, A, A*.



Exemplo

Derivação de *ababaa* :
ababAA $\Rightarrow$ *ababaA*

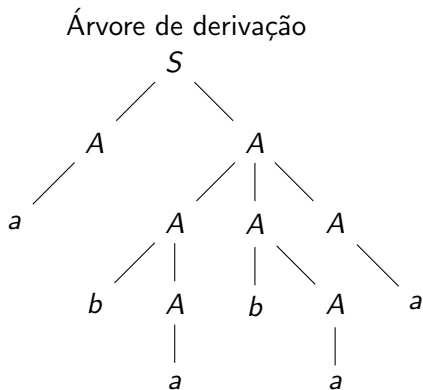
Ordenação: *a, b, a, b, a, A*.



Exemplo

Derivação de *ababaa* :
ababaA $\Rightarrow$ *ababaa*

Ordenação: *a, b, a, b, a, a*.



Ordenação

Para obtermos o resultado da derivação:

1. Inicialmente: A única folha é S e a ordenação é óbvia;
2. Quando uma regra $A \rightarrow x_1 x_2 \dots x_n$ é aplicada para gerar os filhos de A , cada x_i se torna uma folha e A é substituída na ordenação das folhas pela sequência $x_1, x_2, \dots, x_n$;
3. A aplicação da regra $A \rightarrow \lambda$ provoca a simples troca de A pela palavra vazia.

A *fronteira* da árvore de derivação é a palavra gerada pela mesma.

Exemplos

Vejamos as árvores de derivação para cada um dos quatro exemplos anteriores.

Exemplo 1

Derivação (a):

$S \Rightarrow AA$

$\Rightarrow aA$

$\Rightarrow aAAA$

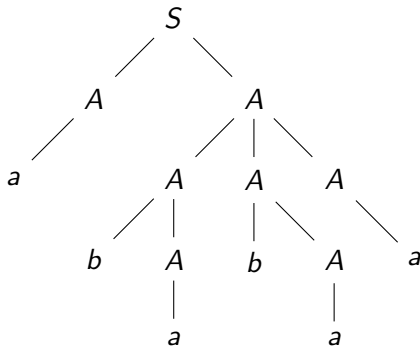
$\Rightarrow abAAA$

$\Rightarrow abaAA$

$\Rightarrow ababAA$

$\Rightarrow ababaA$

$\Rightarrow ababaa$



Exemplo 2

Derivação (b):

$S \Rightarrow AA$

$\Rightarrow AAAA$

$\Rightarrow aAAA$

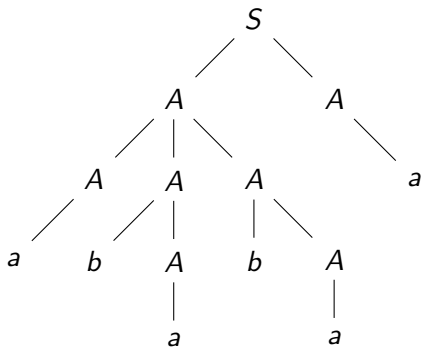
$\Rightarrow abAAA$

$\Rightarrow abaAA$

$\Rightarrow ababAA$

$\Rightarrow ababaA$

$\Rightarrow ababaa$



Exemplo 3

Derivação (c):

$S \Rightarrow AA$

$\Rightarrow Aa$

$\Rightarrow AAAa$

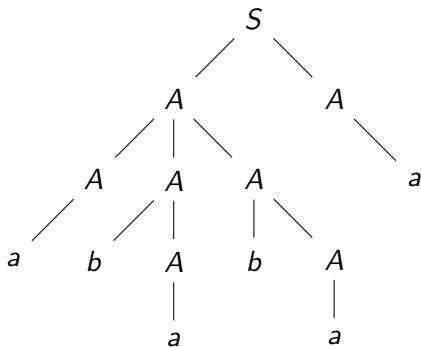
$\Rightarrow AAbAa$

$\Rightarrow AAbaa$

$\Rightarrow AbAbaa$

$\Rightarrow Ababaa$

$\Rightarrow ababaa$



Exemplo 4

Derivação (d):

$S \Rightarrow AA$

$\Rightarrow aA$

$\Rightarrow aAAA$

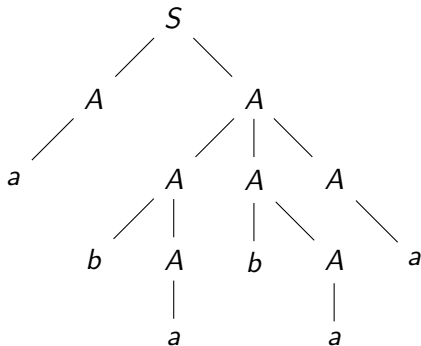
$\Rightarrow abAAA$

$\Rightarrow abaAA$

$\Rightarrow ababAA$

$\Rightarrow ababaA$

$\Rightarrow ababaa$



Observações

- ▶ As árvores de derivação (a) e (d) são a mesma, bem como as árvores (b) e (c) ;
- ▶ Pode-se construir as derivações a partir da árvore de derivação;
- ▶ A liberdade de aplicação das regras (livre de contexto) permite grande flexibilidade na construção das derivações, além de modularidade;
- ▶ Esta modularidade é explorada no desenvolvimento de linguagens complexas;
- ▶ O aluno interessado na prova formal destes comentários pode encontrar material para leitura a partir da página 65 do livro do Sudkamp.

Exemplos de Gramáticas e Linguagens

- ▶ Gramáticas são usadas para *gerar* linguagens;
- ▶ Relação entre gramáticas e linguagens:
 - ▶ Especificar uma linguagem e construir uma gramática que a gere;
 - ▶ Dada uma gramática, qual é a linguagem gerada por ela?
- ▶ É preciso ter experiência para fazer estas duas tarefas, portanto:

Faça exercícios!

Exemplo 1

Qual é a linguagem que a seguinte gramática gera?

$$P : \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aSa \mid aBa \\ B \rightarrow bB \mid b \end{array} \right.$$

Notar que $G = (V, \Sigma, P, S)$, onde

- ▶ $V = \{S, B\}$;
- ▶ $\Sigma = \{a, b\}$;
- ▶ P é o conjunto de regras acima;
- ▶ S é o símbolo de partida.

Solução para o exemplo 1

Qual é a linguagem que a seguinte gramática gera?

$$P : \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aSa \mid aBa \\ B \rightarrow bB \mid b \end{array} \right.$$

$$L(G) = \{a^n b^m a^n \mid n > 0, m > 0\}.$$

Exemplo 2

Qual é a gramática que gera a seguinte linguagem?

$$L(G) = \{a^n b^m c^m d^{2n} \mid n \geq 0, m > 0\}.$$

Solução para o exemplo 2

Qual é a gramática que gera a seguinte linguagem?

$$L(G) = \{a^n b^m c^m d^{2n} \mid n \geq 0, m > 0\}.$$

- ▶ $G = (V, \Sigma, P, S)$, onde:
- ▶ $V = \{S, A\}$;
- ▶ $\Sigma = \{a, b, c, d\}$;
- ▶ $S \in V$ é o símbolo de partida;
- ▶ P é o conjunto de regras abaixo:

$$P : \begin{cases} S \rightarrow aSdd \mid A \\ A \rightarrow bAc \mid bc \end{cases}$$

Exemplo 3

Qual é a gramática que gera a linguagem das palavras que são palíndromes sobre o alfabeto $\{a, b\}$?

Obs.: uma palavra w é palíndromo se $w = w^R$.

$$L(G) = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R\}.$$

Solução para o exemplo 3

Qual é a gramática que gera a linguagem das palavras que são palíndromes sobre o alfabeto $\{a, b\}$?

Obs.: uma palavra w é palíndromo se $w = w^R$.

$$L(G) = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R\}.$$

$$P : \begin{cases} S \rightarrow a \mid b \mid \lambda \\ S \rightarrow aSa \mid bSb \end{cases}$$

Obs.: A partir destas regras, construa os conjuntos V e Σ .
Considere que S é o símbolo de partida.

Exemplo 4

Qual é a linguagem que a seguinte gramática $G = (V, \Sigma, P, S)$ gera?

- ▶ $V = \{S\};$
- ▶ $\Sigma = \{a, b\};$
- ▶ P é o conjunto de regras abaixo;

$$P : \{ S \rightarrow aSb \mid aSbb \mid \lambda$$

Solução para o exemplo 4

Qual é a linguagem que a seguinte gramática $G = (V, \Sigma, P, S)$ gera?

- ▶ $V = \{S\}$;
- ▶ $\Sigma = \{a, b\}$;
- ▶ P é o conjunto de regras abaixo;

$$P : \{ S \rightarrow aSb \mid aSbb \mid \lambda$$

$$L(G) = \{a^n b^m \mid 0 \leq n \leq m \leq 2n\}.$$

Exemplo 5

Qual é a linguagem que a seguinte gramática gera?

$$P : \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow abScB \mid \lambda \\ B \rightarrow bB \mid b \end{array} \right.$$

Solução para o exemplo 5

Qual é a linguagem que a seguinte gramática gera?

$$P : \begin{cases} S \rightarrow abScB \mid \lambda \\ B \rightarrow bB \mid b \end{cases}$$

$$L(G) = \{(ab)^n(cb^{m_n})^n \mid n \geq 0, m_n > 0\}.$$

Exemplo 6

Quais são as linguagens que as seguintes gramáticas geram?

Obs.: P_1 e P_2 são respectivamente o conjunto de regras para as gramáticas G_1 e G_2 .

$$P_1 : \begin{cases} S \rightarrow AB \\ A \rightarrow aA \mid a \\ B \rightarrow bB \mid \lambda \end{cases}$$

$$P_2 : \begin{cases} S \rightarrow aS \mid aB \\ B \rightarrow bB \mid \lambda \end{cases}$$

Solução para o exemplo 6

Quais são as linguagens que as seguintes gramáticas geram?

Obs.: P_1 e P_2 são respectivamente o conjunto de regras para as gramáticas G_1 e G_2 .

$$P_1 : \begin{cases} S \rightarrow AB \\ A \rightarrow aA \mid a \\ B \rightarrow bB \mid \lambda \end{cases} \qquad P_2 : \begin{cases} S \rightarrow aS \mid aB \\ B \rightarrow bB \mid \lambda \end{cases}$$

$$L(G_1) = L(G_2) = a^+b^*.$$

Exemplo 7

Considere que L é definida pela seguinte expressão regular:

$$a^*ba^*ba^*$$

Isto é, o conjunto das palavras que contêm exatamente dois b 's.
Dar duas gramáticas diferentes G_1 e G_2 que gerem L .

Solução para o exemplo 7

Considere que L é definida pela seguinte expressão regular:

$$a^*ba^*ba^*$$

Isto é, o conjunto das palavras que contêm exatamente dois b 's.
Dar duas gramáticas diferentes G_1 e G_2 que gerem L .

$$P_1 : \begin{cases} S \rightarrow AbAbA \\ A \rightarrow aA \mid \lambda \end{cases}$$

$$P_2 : \begin{cases} S \rightarrow aS \mid bA \\ A \rightarrow aA \mid bB \\ B \rightarrow aB \mid \lambda \end{cases}$$

Exemplo 8

Modificar o exemplo 7 para gerar palavras com *pelo menos* dois b 's.

Solução para o exemplo 8

Modificar o exemplo 7 para gerar palavras com *pelo menos* dois *b*'s.

$$P_1 : \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow AbAbA \\ A \rightarrow aA \mid bA \mid \lambda \end{array} \right.$$

$$P_2 : \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aS \mid bA \\ A \rightarrow aA \mid bB \\ B \rightarrow aB \mid bB \mid \lambda \end{array} \right.$$

Exemplo 9

Dê uma gramática para a linguagem das palavras que têm tamanho par sobre $\{a, b\}$.

Solução para o exemplo 9

Dê uma gramática para a linguagem das palavras que têm tamanho par sobre $\{a, b\}$.

$$P : \begin{cases} S \rightarrow aO \mid bO \mid \lambda \\ O \rightarrow aS \mid bS \end{cases}$$

Obs.: Este exercício pode ser modificado para as palavras cujo tamanho pode ser divisível por 3, por 4,

Exemplo 10

Dê uma gramática para a linguagem das palavras que têm um número par de b 's sobre o alfabeto $\{a, b\}$.

Solução para o exemplo 10

Dê uma gramática para a linguagem das palavras que têm um número par de b 's sobre o alfabeto $\{a, b\}$.

$$P_1 : \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aS \mid bl \mid \lambda \\ l \rightarrow al \mid bS \end{array} \right.$$

$$P_2 : \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aS \mid bl \mid \lambda \\ l \rightarrow al \mid bS \mid bC \\ C \rightarrow aC \mid \lambda \end{array} \right.$$

Exemplo 11

Dê uma gramática para a linguagem das palavras que têm um número par de a 's e um número par de b 's sobre o alfabeto $\{a, b\}$.

Solução para o exemplo 11

Dê uma gramática para a linguagem das palavras que têm um número par de a 's e um número par de b 's sobre o alfabeto $\{a, b\}$.

Ideia:

	a 's	b 's
S	par	par
A	par	ímpar
B	ímpar	par
C	ímpar	ímpar

$$P : \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aB \mid bA \mid \lambda \\ A \rightarrow aC \mid bS \\ B \rightarrow aS \mid bC \\ C \rightarrow aA \mid bB \end{array} \right.$$

Exemplo 12

Dê uma gramática para a linguagem das palavras sobre o alfabeto $\{a, b, c\}$ de todas as palavras que não contém a subpalavra abc

Solução para o exemplo 12

Dê uma gramática para a linguagem das palavras sobre o alfabeto $\{a, b, c\}$ de todas as palavras que não contém a subpalavra abc

Ideia:

- ▶ S significa: estaca zero;
- ▶ A significa: já apareceu um a , atenção;
- ▶ B significa: já apareceu uma sequência ab , cuidado! não pode aparecer um c agora.

$$P : \begin{cases} S \rightarrow aA \mid bS \mid cS \mid \lambda \\ A \rightarrow bB \mid aA \mid cS \mid \lambda \\ B \rightarrow aA \mid bS \mid \lambda \end{cases}$$

Licença

- ▶ Slides feitos em $\text{\LaTeX}$ usando beamer e tikz, editados com vim.
- ▶ Licença

Creative Commons Atribuição-Uso Não-Comercial-Vedada a Criação de Obras Derivadas 2.5 Brasil License.<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/br/>

Creative Commons Atribuição-Uso Não-Comercial-Vedada a Criação de Obras Derivadas 2.5 Brasil License.<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/br/>