ITC: Introdução à Teoria da Computação

Marcos Castilho

DInf/UFPR

31 de maio de 2021

Gramáticas Regulares

Uma Gramática Livre de Contexto em que as regras tem uma das formas seguintes:

- $A \to a$
- $A \to aB$
- $A \to \lambda$

Onde $A, B \in V$, $a \in \Sigma$, é chamada de *Gramática Regular*.

Uma linguagem é dita ser regular se pode ser gerada por uma gramática regular.

Exemplo 1

Seja L definida pela expressão regular a^+b^*. L é regular pois $L = L(G)$, onde:

$$P : \begin{cases} S \rightarrow aS \mid aB \\ B \rightarrow bB \mid \lambda \end{cases}$$

Isto ocorre ainda que, para L, exista uma gramática G_1, dada abaixo, que não é regular.

$$P_1 : \begin{cases} S \rightarrow AB \\ A \rightarrow aA \mid a \\ B \rightarrow bB \mid \lambda \end{cases}$$

Exemplo 2

Seja G dada pelas regras:

$$P : \begin{cases} S \rightarrow abSA \mid \lambda \\ A \rightarrow Aa \mid \lambda \end{cases}$$

Perguntas:

- L é regular?
- Se L for regular, mostre uma gramática regular tal que $L = L(G)$

Soluções para o exemplo 2

Seja G dada pelas regras:

$$P : \begin{cases} S \rightarrow abSA \mid \lambda \\ A \rightarrow Aa \mid \lambda \end{cases}$$

Perguntas:

- L é regular?

Sim, pois L pode ser expressa pela expressão regular: $\lambda + (ab)^+ a^*$.

Soluções para o exemplo 2

Seja G dada pelas regras:

$$P : \begin{cases} S \to abSA \mid \lambda \\ A \to Aa \mid \lambda \end{cases}$$

Perguntas:

- Se L for regular, mostre uma gramática regular tal que $L = L(G)$

Abaixo estão as regras de uma gramática regular que gera L:

$$P : \begin{cases} S \to aB \mid \lambda \\ B \to bS \mid bA \\ A \to aA \mid \lambda \end{cases}$$

S e B geram prefixos de $(ab)^*$. Se o sufixo for a^* vai para A.

Gramáticas Regulares e Autômatos Finitos

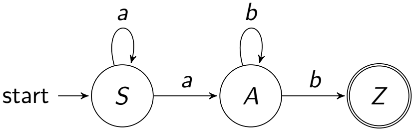
Objetivo: Estabelecer o relacionamento entre as Gramáticas Regulares e os Autômatos Finitos.

Veremos dois teoremas:

1. Toda gramática regular gera uma linguagem regular;
2. Toda linguagem regular é gerada por uma gramática regular.

Exemplo comparativo

$$P : \begin{cases} S \rightarrow aS \mid aA \\ A \rightarrow bA \mid b \end{cases}$$



Derivação	Computação	Palavra processada
$S \Rightarrow aS$	$[S, aabb] \vdash [S, abb]$	a
$\Rightarrow aaA$	$\vdash [A, bb]$	aa
$\Rightarrow aabA$	$\vdash [A, b]$	aab
$\Rightarrow aabb$	$\vdash [Z, \lambda]$	$aabb$

Teorema

Toda gramática regular gera uma linguagem regular.

Prova

Seja $G = (V, \Sigma, P, S)$ uma Gramática Regular. Definimos o seguinte Autômato Finito não-Determinístico

$$M = (Q, \Sigma, \delta, \{S\}, F)$$

tal que $L(M) = L(G)$.
Deve-se construir M de forma que $S \stackrel{*}{\Rightarrow} w$ se, e somente se, $\hat{\delta}(\{S\}, w) \cap F \neq \emptyset$

Prova, continuação

Para isso, seja algum $Z \notin V$. Então definimos:

- $Q = \begin{cases} V \cup \{Z\}, & \text{se } P \text{ contém } X \rightarrow a) \\ V, & \text{em caso contrário} \end{cases}$
- Definição de δ:
  - Para toda regra da forma $X \rightarrow aY$, faça $Y \in \delta(X, a)$;
  - Para toda regra da forma $X \rightarrow a$, faça $Z \in \delta(X, a)$.
- $F = \begin{cases} \{X \mid X \rightarrow \lambda \in P\} \cup \{Z\}, & \text{se } Z \in Q \\ \{X \mid X \rightarrow \lambda \in P\}, & \text{caso contrário} \end{cases}$

Prova

A demonstração de que $L(G) = L(M)$ é em duas fases:

1. $S \overset{*}{\Rightarrow} wX$ se, e somente se, $X \in \hat{\delta}(\{S\}, w)$ para $w \in \Sigma^*$ e $X \in V$.
2. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ se, e somente se, $\hat{\delta}(\{S\}, w) \cap F \neq \emptyset$ para $w \in \Sigma^*$.

Prova, continuação

Primeiro, mostraremos por indução em $|w|$ que:

$$S \stackrel{*}{\Rightarrow} wX \text{ se, e somente se, } X \in \hat{\delta}(\{S\}, w) \text{ para } w \in \Sigma^* \text{ e } X \in V.$$

Prova, continuação

Base: Pela forma das regras de G, $|w| \geq 1$. Então seja $w = a \in \Sigma$. Assim:

$S \stackrel{*}{\Rightarrow} aX$ se, e somente se, $S \rightarrow aX \in P$, pela definição de $\stackrel{*}{\Rightarrow}$ e de gramática regular.

Isto se, e somente se, $X \in \delta(S, a)$, pela definição de δ

Isto se, e somente se, $X \in \hat{\delta}(\{S\}, a)$, pela definição de $\hat{\delta}$.

Prova, continuação

Hipótese de indução: Suponha que para um certo $w \in \Sigma^+$ arbitrário

$S \overset{*}{\Rightarrow} wX$ se, e somente se, $X \in \hat{\delta}(\{S\}, w)$ para $w \in \Sigma^*$ e $X \in V$.

Passo indutivo: Mostraremos que vale também para aw, $a \in \Sigma$.

Prova, continuação

$S \overset{*}{\Rightarrow} awX \Leftrightarrow S \rightarrow aY \in P$ e $Y \overset{*}{\Rightarrow} wX$
pela definição de $\overset{*}{\Rightarrow}$ e de gramática regular.

Isso se, e somente se, $S \rightarrow aY \in P$ e $X \in \hat{\delta}(\{Y\}, w)$
pela hipótese de indução.

Isso se, e somente se, $Y \in \delta(S, a)$ e $X \in \hat{\delta}(\{Y\}, w)$
pela definição de δ.

Isso se, e somente se, $X \in \hat{\delta}(\{S\}, aw)$,
pela definição de $\hat{\delta}$.

Prova, continuação

Agora passamos para a parte 2, isto é:

$S \stackrel{*}{\Rightarrow} w$ se, e somente se, $\hat{\delta}(\{S\}, w) \cap F \neq \emptyset$ para $w \in \Sigma^*$.

Temos dois casos:

- Primeiro caso: $w = \lambda$;
- Segundo caso: $w = xa$.

Primeiro caso

Caso $w = \lambda$.

$S \overset{*}{\Rightarrow} \lambda \Leftrightarrow S \rightarrow \lambda \in P$
pela definição $\overset{*}{\Rightarrow}$ e de gramática regular.

Isso se, e somente se, $S \in F$ e $S \neq Z$,
pela definição de F.

Isso se, e somente se, $\hat{\delta}(\{S\}, \lambda) \in F$,
pela definição de $\hat{\delta}$.

Isso se, e somente se, $\hat{\delta}(\{S\}, \lambda) \cap F \neq \emptyset$,
pois $|\hat{\delta}(\{S\}, \lambda)| = |\{S\}| = 1$.

Segundo caso

Caso $w = xa$.

$$S \stackrel{*}{\Rightarrow} xa \Leftrightarrow \begin{cases} S \stackrel{*}{\Rightarrow} xaX \text{ e } X \rightarrow \lambda \in P \\ \text{ou} \\ S \stackrel{*}{\Rightarrow} xX \text{ e } X \rightarrow a \in P \end{cases} \quad \text{(definição de } \stackrel{*}{\Rightarrow} \text{ e de GR)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X \in \hat{\delta}(\{S\}, xa) \text{ e } X \rightarrow \lambda \in P \\ \text{ou} \\ S \stackrel{*}{\Rightarrow} xX \text{ e } X \rightarrow a \in P \end{cases} \quad \text{(primeira parte da prova)}$$

Segundo caso, continuação

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X \in \hat{\delta}(\{S\}, xa) \text{ e } X \to \lambda \in P \\ \text{ou} \\ X \in \hat{\delta}(\{S\}, x) \text{ e } X \to a \in P \end{cases} \quad \text{(primeira parte da prova)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X \in \hat{\delta}(\{S\}, xa) \text{ e } X \to \lambda \in P \\ \text{ou} \\ X \in \hat{\delta}(\{S\}, x) \text{ e } Z \in \delta(X, a) \end{cases} \quad \text{(definição de } \delta\text{)}$$

Segundo caso, continuação

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X \in \hat{\delta}(\{S\}, xa) \text{ e } X \to \lambda \in P \\ \text{ou} \\ Z \in \hat{\delta}(\{S\}, xa) \end{cases} \qquad \text{(pela definição de } \hat{\delta}\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\delta}(\{S\}, xa) \cap F \neq \emptyset. \text{ (pela definição de } F\text{)}$$

Teorema

Toda linguagem regular é gerada por uma gramática regular.

Prova

Seja um AFN $M = (Q, \Sigma, \delta, \{S\}, F)$. Uma gramática regular que gera $L(M)$ é:

$$G = (Q, \Sigma, P, S), \text{ em que:}$$

$$P = \{q \to aq\prime \mid q\prime \in \delta(q, a)\} \cup \{q \to \lambda \mid q \in F\}.$$

Prova

A prova usa o seguinte lema:

$S \overset{*}{\Rightarrow} wq$ se, e somente se, $q \in \hat{\delta}(\{S\}, w)$ para todo $q \in Q$ e $w \in \Sigma^*$.

Prova

Para mostrar que $L(M) = L(G)$ provaremos que:

$S \overset{*}{\Rightarrow} w$ se, e somente se, $\hat{\delta}(\{S\}, w) \cap F \neq \emptyset$ para todo $w \in \Sigma^*$.
De fato:

$S \overset{*}{\Rightarrow} w \Leftrightarrow S \overset{*}{\Rightarrow} wq$ e $q \to \lambda \in P$, pela definição de P.

Isso se, e somente se, $q \in \hat{\delta}(\{S\}, w)$ e $q \to \lambda \in P$, pelo lema.

Isso se, e somente se, $q \in \hat{\delta}(\{S\}, w)$ e $q \in F$, pela definição de P.

Isso se, e somente se, $\hat{\delta}(\{S\}, w) \cap F \neq \emptyset$,
pela definição de interseção.

Exercícios

Páginas 131 e 132 do livro do Newton.

Licença

- Slides feitos em LaTeX usando beamer e tikz, editados com vim.
- Licença

Creative Commons Atribuição-Uso Não-Comercial-Vedada a Criação de Obras Derivadas 2.5 Brasil License.`http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/br/`

Creative Commons Atribuição-Uso Não-Comercial-Vedada a Criação de Obras Derivadas 2.5 Brasil License.`http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/br/`