

CI1055: Algoritmos e Estruturas de Dados I

Profs. Drs. Marcos Castilho, Bruno Müller Jr, Carmem Hara

Departamento de Informática/UFPR

30 de novembro de 2021

Resumo

Aplicações de vetores: permutações (parte 1)

Objetivos da aula

- Resolver problemas que envolvem o uso de vetores
- Discutir eficiência dos algoritmos

- O aprendizado de vetores é fortalecido quando procuramos resolver problemas variados que podem ser implementados com seu uso
- O entendimento da diferença entre o índice do vetor e o conteúdo ao qual este índice aponta é importante
- Vamos apresentar um problema matemático conhecido como *permutação* e tentar resolvê-lo usando vetores
- Vamos também discutir a eficiência das diferentes soluções

- Uma permutação é uma função bijetora de um conjunto nele mesmo
- Intuitivamente, é uma maneira de reordenar os elementos do conjunto (que não tem elementos repetidos)

Exemplo

Seja o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$:

Uma permutação pode ser esta:

$$P(1) = 4,$$

$$P(2) = 1,$$

$$P(3) = 5,$$

$$P(4) = 2,$$

$$P(5) = 3.$$

Outra pode ser esta:

$$P(1) = 2,$$

$$P(2) = 5,$$

$$P(3) = 1,$$

$$P(4) = 3,$$

$$P(5) = 4.$$

Esquemáticamente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Esquemáticamente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Número de diferentes permutações

- Existem $n!$ maneiras de se reordenar os n elementos de um conjunto
- Se $n = 5$ então existem 120 permutações

Representação computacional

- Pode-se usar um vetor para modelar uma permutação
- Seja V um vetor de n posições inteiras
- Cada posição é um valor (sem repetição) entre 1 e n .
- Por exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1	2	3	4	5
4	1	5	2	3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1	2	3	4	5
2	5	1	3	4

Problemas com permutações

- Testar se uma representação corresponde a uma permutação
- Gerar aleatoriamente uma representação correspondente a uma permutação
- Determinar a ordem de uma permutação

Testar se uma representação é uma permutação

- Dado um vetor qualquer, ele pode ser a representação de alguma permutação do conjunto de números entre 1 e n ?
- Computacionalmente, deve-se testar de todos os números entre 1 e n estão presentes no vetor
- Isto é, não pode haver números repetidos nem faltar ninguém

Algoritmo 1

- Para todos os números entre 1 e n
- Testa se este número está presente no vetor
- Se todos estiverem, dado que são n números em um vetor de n elementos, é porque não houve repetição
- Logo, a permutação é válida

Implementação do algoritmo 1

```
1 function testa_permutacao (var v: vetor; n: integer): boolean;  
2 var i, j: integer;  
3     eh_permutacao: boolean;  
4 begin  
5     eh_permutacao:= true;  
6     i:= 1;  
7     while eh_permutacao and (i <= n) do  
8         begin  
9             j:= 1;           (* procura se i esta no vetor *)  
10            while (j <= n) and (v[j] < i) do  
11                j:= j + 1;  
12                if v[j] < i then (* se nao achou nao eh permutacao *)  
13                    eh_permutacao:= false;  
14                i:= i +1;  
15            end;  
16            testa_permutacao:= eh_permutacao;  
17 end; (* testa_permutacao *)
```

Análise do algoritmo 1

- Melhor caso: ele procura o elemento 1 e não acha no término do laço interno. Executou n comparações
- Pior caso: ocorre quando o vetor representa uma permutação, neste caso o algoritmo executou n^2 comparações
- Pode ser mais eficiente?

- Usa um vetor auxiliar, inicialmente zerado
- Percorre-se o vetor de entrada e para cada índice:
 - tenta inserir este elemento no vetor auxiliar
 - a inserção é válida se naquela posição do vetor auxiliar houver um zero
 - caso exista um valor diferente de zero, é porque existe um elemento repetido e a permutação não é válida
- Se conseguiu inserir todos os elementos, é porque a permutação é válida

Implementação do algoritmo 2

```
1  function testa_permutacao_v2 (var v: vetor; n: integer): boolean;  
2  var i: integer;  
3      aux: vetor;  
4      eh_permutacao: boolean;  
5  begin  
6      zerar_vetor (aux,n);  
7      eh_permutacao:= true;  
8      i:= 1;  
9      while eh_permutacao and (i <= n) do  
10     begin  
11         if (v[i] >= 1) and (v[i] <= n) and (aux[v[i]] = 0) then  
12             aux[v[i]]:= v[i]  
13         else  
14             eh_permutacao:= false;  
15             i:= i + 1;  
16         end;  
17         testa_permutacao_v2:= eh_permutacao;  
18 end; (* testa_permutacao_v2 *)
```

Análise do algoritmo 2

- Melhor caso: executou n atribuições para zerar o vetor auxiliar. Em seguida, inseriu um elemento com sucesso. Logo depois, não conseguiu inserir o segundo. Custou portanto $n + 2$ operações
- Pior caso: ocorre quando o vetor representa uma permutação, neste caso o algoritmo executou n atribuições e n comparações, em um custo total de $n + n = 2n$ operações
- Isto é, o melhor caso é similar, mas o pior caso é bem mais eficiente

- este material está no livro no capítulo 9, seção 9.7.1

- Slides feitos em \LaTeX usando beamer
- Licença

Creative Commons Atribuição-Uso Não-Comercial-Vedada a Criação de Obras Derivadas 2.5 Brasil License.<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/br/>

Creative Commons Atribuição-Uso Não-Comercial-Vedada a Criação de Obras Derivadas 2.5 Brasil License.<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/br/>