Matemática Discreta

Exercícios

12 de março de 2020

Sumário

Os exercícios estão classificados de acordo com a seguinte legenda.

-: exercícios de interesse marginal: complementam o assunto de alguma forma mas podem ser ignorados sem comprometer o entendimento.

@: exercícios programados para discussão em aula: procure fazê-los antes de serem discutidos em aula.

$\star$**:** exercícios prioritários: na impossibilidade de fazer todos, dê prioridade a estes.

#: exercícios mais difíceis e/ou trabalhosos: não comece por estes.

1 Elementos de Lógica

$1^@$. Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

(a) "$2 \leq 3$".
(b) "$10 > 20$".
(c) "$x^2 \leq x$".

$2^@$. Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

(a) $(1 < 2)$ e $(2 < 3) \implies (1 < 3)$,
(b) $(1 < 2) \implies (10 < 30)$,
(c) $1 > 2 \implies 2 < 3$,
(d) $1 > 2 \implies 2 > 3$.

$3^@$. Sejam P e Q os seguintes predicados.

$$\begin{aligned} P(x) &: x \leq x^2, \\ Q(x, y) &: x \leq y^2. \end{aligned}$$

Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

(a) $P(2)$.
(b) $P(1/2)$.
(c) $Q(1, 1)$.
(d) $R(t) = Q(1, t)$.

$4^@$. Seja $P(x)$ o predicado "$x \leq x^2$".

Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

(a) $P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
(b) $P(x)$, para algum $x \in \mathbb{R}$.
(c) $P(x)$, para todo $x \geq 1$.
(d) $P(x)$, para algum $0 < x < 1$.

$5^\star$. Prove que se A, B e C são proposições, então

(a) $F \implies A$, ou seja, a partir de uma proposição falsa pode-se concluir qualquer coisa.

(b) $(A \implies B) \equiv ((\text{ não } B) \implies (\text{ não } A))$, também conhecida como *contrapositiva* da implicação. Uma "prova de $A \implies B$ por contrapositiva" é uma prova de que $((\text{ não } B) \implies (\text{ não } A))$.

(c) $(A \implies F) \equiv \text{ não } A$, ou seja, uma implicação cujo consequente é falso só pode ser verdadeira se o antecedente é falso. Este é o princípio por baixo das "provas por contradição".

(d) $((A \implies B) \text{ ou } (A \implies C)) \equiv (A \implies (B \text{ ou } C))$ (distributividade da disjunção pela implicação).

(e) $((A \implies B) \text{ e } (A \implies C)) \equiv (A \implies (B \text{ e } C))$ (distributividade da conjunção pela implicação).

(f) $((B \implies A) \text{ ou } (C \implies A)) \equiv ((B \text{ e } C) \implies A)$ (outra distributividade).

(g) $((B \implies A) \text{ e } (C \implies A)) \equiv ((B \text{ ou } C) \implies A)$ (outra distributividade).

(h) $((A \implies B) \text{ e } (A \implies (\text{ não } B))) \implies (\text{ não } A)$ (outra maneira de expressar o princípio por baixo de uma prova por contradição).

6*. Considere os seguintes predicados.

$$\begin{aligned} I(x) &\equiv x \in \mathbb{Z}, \\ P(f,x) &\equiv I(x) \implies I(f(x)), \\ Q(f,x) &\equiv I(f(x)) \implies I(x). \end{aligned}$$

Dê um exemplo de função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que

(a) satisfaz o predicado $P(g,x),\ \text{para todo } x \in \mathbb{R}$.

(b) não satisfaz o predicado $P(g,x),\ \text{para todo } x \in \mathbb{R}$.

(c) satisfaz o predicado $\text{ não } (P(g,x),\ \text{para todo } x \in \mathbb{R})$.

(d) satisfaz o predicado $Q(g,x),\ \text{para todo } x \in \mathbb{R}$.

(e) não satisfaz o predicado $Q(g,x),\ \text{para todo } x \in \mathbb{R}$.

(f) satisfaz o predicado $\text{ não } (Q(g,x),\ \text{para todo } x \in \mathbb{R})$.

7$^{\#}$. Considere os seguintes predicados.

$$\begin{aligned}
L(f) &\equiv \lim f(n) = 0, \\
P(n, f, g, h) &\equiv f(n) = g(n)(1 + h(n)), \\
B(f, g, h) &\equiv L(h) \text{ e } (P(n, f, g, h), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}), \\
A(f, g) &\equiv B(f, g, h), \text{ para algum } h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Dê um exemplo de funções $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que

(a) satisfazem $A(f, g)$.

(b) não satisfazem $A(f, g)$.

(c) satisfazem não $A(f, g)$.

8$^{\#}$. Seja $O(f)$ o seguinte predicado (onde $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$).

$$(((n \geq k \implies |f(n)| \leq c), \text{ para algum } k > 0), \text{ para algum } c > 0), \text{ para todo } n \geq k.$$

Avalie as seguintes proposições justificando cada uma, isto é, apresentando uma prova de se são verdadeiras ou falsas.

(a) $O(n/(n-1))$,

(b) $O(n)$,

(c) $O(10 + 1/n)$,

(d) $O(\log n)$,

(e) $O(42)$.

9$^{\#}$. Considere os seguintes predicados.

$$\begin{aligned}
P_1(f, g, c, n) &\equiv |f(n)| \leq c|g(n)|, \\
P_2(f, g, c, k) &\equiv P_1(f, g, c, n), \text{ para todo } n \geq k, \\
P_3(f, g, c) &\equiv P_2(f, g, c, k), \text{ para algum } k \in \mathbb{N}, \\
O(f, g) &\equiv P_3(f, g, c), \text{ para algum } c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Para cada par de funções $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, classifique as proposições abaixo como verdadeiras ou falsas.

(a) $O(f, g)$, para $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$.

(b) $O(g, f)$, para $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$.

(c) $O(f, g)$, para $f(n) = n/2$ e $g(n) = n$.

(d) $O(g, f)$, para $f(n) = n/2$ e $g(n) = n$.

$10^{\#}$. Sejam $D(x, y, d)$ e $M(x, y)$ os seguintes predicados, respectivamente.

$D(x, y, d)$**:** $|x - y| < d$,

$M(x, y)$**:** $x > y$.

Use os predicados $D(x, y, d)$ e $M(x, y)$ para expressar os seguintes predicados.

$L_1(f, a, l)$**:** $\lim_{x \to a} f(x) = l$.

$L_2(f, l)$**:** $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$.

$L_3(f, a)$**:** $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$.

$L_4(f)$**:** $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

2 Conjuntos e Inteiros

$11^{@}$. Seja A um conjunto finito e seja $B \subseteq A$. Prove que

$$A = (A - B) \cup B,$$

12. Sejam A, B e C conjuntos finitos. Prove que

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

$13^{\#}$. Seja A um conjunto e seja $k \in \mathbb{N}$. Vamos denotar por $\binom{A}{k}$ o conjunto dos subconjuntos de k elementos de A, isto é,

$$\binom{A}{k} = \{S \subseteq A \mid |S| = k\}.$$

Dado $a \in A$, sejam

$$\begin{aligned} A^- &= \binom{A - \{a\}}{k}, \\ A^+ &= \binom{A - \{a\}}{k-1}, \\ \overline{A} &= \left\{S \cup \{a\} \mid S \in A^+\right\}. \end{aligned}$$

Prove que

$$\binom{A}{k} = A^- \cup \overline{A},$$

14. Dados $f, g \colon A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ e $c \in \mathbb{C}$, é verdade que

(a)
$$\prod_{x \in X} c = c|X|?$$

(b)
$$\prod_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \prod_{x \in X} f(x) + \prod_{x \in X} g(x)?$$

(c)
$$\sum_{x \in X} f(x)g(x) = \left(\sum_{x \in X} f(x)\right)\left(\sum_{x \in X} g(x)\right)?$$

Justifique.

3 Aproximação Assintótica

15[@]. A *Série Harmônica* é a série dada por

$$H(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

A diferença $H(n) - \ln n$ converge e seu limite é conhecido como *constante de Euler–Mascheroni*, isto é,

$$\lim H(n) - \ln n = \gamma := 0.577215664901532860606512090082402431042159335939992\ldots$$

Prove que

$$H(n) \approx \ln n.$$

16@. Prove que

(a) Prove que
$$\binom{n}{2} \approx \frac{n^2}{2}$$

(b)
$$\sum_{i=1}^{n} i \approx \frac{n^2}{2}$$

(c) A partir da aproximação de Stirling,
$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$
prove que
$$\log_b n! \approx n \log_b n, \text{ para todo } b > 1.$$

(d) Use o resultado do Exercício 16c para provar que
$$\sum_{i=1}^{n} \log_b i \approx n \log_b n, \text{ para todo } b > 1$$

(e)
$$\lg n \approx \lfloor \lg n \rfloor \approx \lceil \lg n \rceil$$

17. A partir da aproximação de Taylor
$$\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \approx e^x, \text{ para todo } x \in \mathbb{C},$$
conclua que
$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{i!} \approx \frac{1}{e}.$$

18. Seja $P\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dado por
$$P(n) = a_0 n^0 + a_1 n^1 + a_2 n^2 + \ldots + a_k n^k,$$
com $a_k \neq 0$, um polinômio de grau k.

Prove que
$$P(n) \approx a_k n^k.$$

19. Prove que

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \approx \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

20. Prove que

$$\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1 \approx \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

21*. Seja $c \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ e seja

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} c^i.$$

Prove que

(a) se $c > 1$, então $s(n) \approx \frac{c^{n+1}}{c-1}$,

(b) se $0 < c < 1$, então $s(n) \approx \frac{1}{1-c}$.

22#. Sejam $F, f, g, h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $F(n) \approx f(n)$, $F(n) \approx h(n)$, e

$$f(n) \leq g(n) \leq h(n), \ \textsf{para todo } n \geq n_0,$$

Prove que, neste caso,

$$F \approx f \approx g \approx h.$$

23#. Sejam $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Prove que $f(n) \approx g(n)$ se e somente se existe $\varepsilon \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que

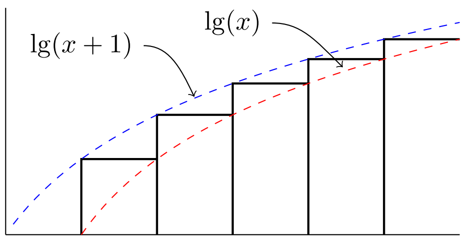
$$f(n) = g(n)(1 + \varepsilon(n)),$$

e

$$\lim \varepsilon(n) = 0.$$

24#. Prove que $\approx$ é uma relação de equivalência sobre o conjunto das funções $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

25$^{\#}$. A partir da observação de que



$$\int_1^n \log_b(x)dx \leq \sum_{i=1}^{n} \log_b i \leq \int_0^n \log_b(x+1)dx.$$

prove que

$$\sum_{i=1}^{n} \log_b i \approx n \log_b n.$$

4 Piso e Teto

26. É verdade que $\lfloor f(n) \rfloor \approx f(n)$ para toda $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$? Justifique.

27. É verdade que $\sum_{i=1}^{n} \lfloor f(i) \rfloor \approx \sum_{i=1}^{n} f(i)$ para toda $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$? Justifique.

28$^{\#}$. A soma

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor \tag{1}$$

aparece com certa frequência em aplicações ligadas à computação.

(a) Prove que, dado $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\lfloor \lg i \rfloor = k \text{ para todo } i \in [2^k..2^{k+1} - 1].$$

(b) Use esta observação para agrupar convenientemente os termos em (1).

(c) Prove que[1]

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor = n \lfloor \lg n \rfloor - \left(2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} - \lfloor \lg n \rfloor - 2\right).$$

(d) Prove que

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor \approx \sum_{i=1}^{n} \lg i.$$

(e) Prove que[2]

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor \approx n \lg n.$$

(f) Prove que

$$\lg n! \approx n \lg n.$$

(g) As proposições acima podem ser generalizadas para logaritmos em outras bases além de 2? Como?

[1]**Sugestão:** use o resultado do Exercício 36 e o fato de que $\sum_{i=0}^{n} i2^i = 2^{n+1}(n-1)+2$.
[2]**Sugestão:** use o resultado do Exercício 36

29*. Prove que $\lceil x \rceil$ é o único inteiro que satisfaz

$$x \leq \lceil x \rceil < x + 1,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

30*. Prove que

$$\lceil x \rceil + z = \lceil x + z \rceil .$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $z \in \mathbb{Z}$.

31*. Prove que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

- $\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor = \left\lceil \dfrac{n}{2} \right\rceil$
- $\left\lceil \dfrac{n-1}{2} \right\rceil = \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$

32*. Sejam $n, m \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dadas por

$$\begin{aligned} n(a,b) &= b - a + 1, \\ m(a,b) &= \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor, \end{aligned}$$

Prove que, para todo $a, b \in \mathbb{Z}$,

(a) $a + b$ é par se e somente se $n(a,b)$ é ímpar.

(b) $n(a, m(a,b)) = \left\lceil \dfrac{n(a,b)}{2} \right\rceil$.

(c) $n(m(a,b)+1, b) = \left\lfloor \dfrac{n(a,b)}{2} \right\rfloor$.

(d) $n(a, m(a,b)-1) = \left\lfloor \dfrac{n(a,b)-1}{2} \right\rfloor$.

[3]

33*. Prove que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

[3] **Sugestão:** Use o Exercício 31

(a) $x - \lfloor x \rfloor < 1$.

(b) $\lceil x \rceil - x < 1$.

(c) $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ se e somente se $x \in \mathbb{Z}$

(d) $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$.

34*. Prove que

$$\max \{k \in \mathbb{Z} \mid k < x\} = \lceil x - 1 \rceil,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

35@.

$$\frac{n}{2} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq n \leq 2^{\lceil \lg n \rceil} < 2n.$$

36@. (a)

$$\frac{1}{2} < \frac{n}{2^{\lceil \lg n \rceil}} \leq 1 \leq \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} < 2$$

(b)

$$\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor = 1, \text{ para todo } n > 0.$$

(c)

$$\left\lfloor \frac{n}{2^x} \right\rfloor = 0 \text{ se e somente se } x > \lg n.$$

(d)

$$\lfloor \lg n \rfloor > \lfloor \lg(n-1) \rfloor \text{ se e somente se } n \text{ é potência de 2.}$$

(e)

$$\lceil \lg n \rceil < \lceil \lg(n+1) \rceil \text{ se e somente se } n \text{ é potência de 2.}$$

(f)

$$\lceil \lg(n+1) \rceil = \lfloor \lg n \rfloor + 1.$$

37. Prove que, dados $n, k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor &= \frac{n - (n \bmod k)}{k}, \text{ e} \\ \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil &= \frac{n + k - (n \bmod k)}{k}, \end{aligned}$$

38*. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente e contínua satisfazendo

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Prove que

$$\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil \,, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

39$^\#$. Seja k um inteiro positivo e seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = \frac{x}{k}.$$

Prove que

(a) f uma função contínua.

(b) f uma função crescente.

(c) $f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$

40*. Prove que

(a)

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 2^{\lfloor \lg n \rfloor} + 1 \approx n \lg n$$

(b)

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} 2^i \left\lceil \frac{n}{2^i} \right\rceil - 2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} + 1 \approx n \lg n$$

41$^-$. Se $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ são funções contínuas, então $f \circ g\colon A \to C$ é uma função contínua.

42$^-$. Sejam $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ e $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ funções crescentes. Prove que $f \circ g\colon A \to C$ é uma função crescente.

43$^-$. Sejam $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ e sejam $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ funções contínuas e crescentes satisfazendo

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in A, \text{ e}$$
$$g(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in B.$$

Prove que

$$\begin{aligned} \lfloor f \circ g(\lfloor x \rfloor) \rfloor &= \lfloor f \circ g(x) \rfloor, \text{ e} \\ \lceil f \circ g(\lceil x \rceil) \rceil &= \lceil f \circ g(x) \rceil, \end{aligned}$$

para todo $x \in A$.

44$^-$. Dizemos que uma função $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é integralizada se

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in A,$$

Sejam $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$. Prove que se $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ são funções integralizadas, então $f \circ g\colon A \to C$ é uma função integralizada.

Referências