Matemática Discreta

Segunda Prova

10 de fevereiro de 2021

Instruções

As respostas devem ser enviadas como um arquivo pdf anexo a uma mensagem de e-mail.

1. A mensagem deve ser enviada até as 17h40 para `menottid@gmail.com` (turmas A, B e C) ou `renato.carmo.rc@gmail.com` (turma D).
2. A duração da prova é de 120 minutos. Os 10 minutos restantes até as 17h40 são para preparo e envio da mensagem de e-mail.
3. O Subject: da mensagem deve ser "`CI1237: Prova 2`";
4. Quanto ao arquivo pdf anexo à mensagem,
   (a) o nome do arquivo deve ser seu "login" na rede do Departamento de Informática, todo em minúsculas (por exemplo, `jbas18.pdf`);
   (b) as respostas devem estar na mesma ordem das questões;
   (c) a resposta de cada questão deve iniciar uma página nova;
   (d) a resposta de cada questão pode ocupar várias páginas;
   (e) em cada questão, além da resposta, deve ser apresentado o raciocínio que leva a ela;
   (f) caso o arquivo seja produzido com LaTeX você ganha 10 pontos de bônus;
   (g) caso o arquivo seja montado a partir de fotos de folhas manuscritas, por favor,
      i. escreva com clareza, bom contraste e boa letra;
      ii. cuide para que a fotografia seja feita paralela à superfície do papel.

Durante o período de prova o Professor Menotti estará em `http://meet.google.com/eve-qvqz-usu` para esclarecer eventuais dúvidas.

Boa prova.

1. (34 pontos) O Algoritmo de Karatsuba é um algoritmo recursivo para multiplicação de inteiros que, para números suficientemente grandes, faz menos operações aritméticas do que o algoritmo usual.

   A função $A(n)$, abaixo, descreve o número de operações aritméticas na execução do Algoritmo de Karatsuba com dois inteiros de n dígitos em sua representação binária.

   Resolva esta recorrência.

$$A(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ 5, & \text{se } n = 2, \\ 3A\left(\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil\right) + 20\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil, & \text{se } n > 2. \end{cases}$$

2. (20 pontos) Resolva a seguinte recorrência.

$$f(n) = \begin{cases} 2^n, & \text{se } n \leq 2, \\ \frac{9}{2}f(n-1) - \frac{7}{2}f(n-2) + f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

3. (33 pontos) Resolva a seguinte recorrência.

$$f(n) = \begin{cases} n^2, & \text{se } n \leq 2, \\ 7f(n-1) - 12f(n-2) + 3^n, & \text{se } n > 2. \end{cases}$$

4. (33 pontos) Dê uma expressão livre de somatórios para

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{i^2}{5^i}.$$

1. Temos

$$f(n) = m(n)f(h(n)) + s(n), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde

$$h(n) = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil, m(n) = 3, s(n) = 20 \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil, n_0 = 3,$$

e, portanto,

$$h^k(n) = \left\lceil \frac{n + 2^k - 1}{2^k} \right\rceil = \left\lceil \frac{n-1}{2^k} + 1 \right\rceil = \left\lceil \frac{n-1}{2^k} \right\rceil + 1,$$

e

$$\begin{aligned} s(h^i(n)) &= s\left(\left\lceil \frac{n-1}{2^i} \right\rceil + 1\right) \\ &= 20 \left\lceil \frac{\left(\left\lceil \frac{n-1}{2^i} \right\rceil + 1\right) + 1}{2} \right\rceil \\ &= 20 \left\lceil \frac{\left\lceil \frac{n-1}{2^i} \right\rceil + 2}{2} \right\rceil \\ &= 20 \left(\left\lceil \frac{n-1}{2^{i+1}} \right\rceil + 1\right). \end{aligned}$$

Para ter

$$h^k(n) < n_0,$$

isto é,

$$\left\lceil \frac{n-1}{2^k} \right\rceil + 1 < 3,$$

ou seja

$$\left\lceil \frac{n-1}{2^k} \right\rceil < 2,$$

é preciso

$$\frac{n-1}{2^k} \leq 1,$$

isto é,

$$n - 1 \leq 2^k,$$

e portanto,

$$\lg(n-1) \leq k,$$

e daí,

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\} = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid k \geq \lg(n-1)\right\} = \lceil \lg(n-1) \rceil.$$

Então

$$\begin{aligned} f(n) &= f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) \\ &= f\left(\left\lceil \frac{n-1}{2^{\lceil \lg(n-1) \rceil}} \right\rceil + 1\right) \prod_{i=0}^{\lceil \lg(n-1) \rceil - 1} 3 + \sum_{i=0}^{\lceil \lg(n-1) \rceil - 1} 20 \left(\left\lceil \frac{n-1}{2^{i+1}} \right\rceil + 1\right) \prod_{j=0}^{i-1} 3 \\ &= 3^{\lceil \lg(n-1) \rceil} f\left(\left\lceil \frac{n-1}{2^{\lceil \lg(n-1) \rceil}} \right\rceil + 1\right) + 20 \sum_{i=0}^{\lceil \lg(n-1) \rceil - 1} 3^i \left(\left\lceil \frac{n-1}{2^{i+1}} \right\rceil + 1\right). \end{aligned}$$

Como

$$0 < \frac{n-1}{2^{\lceil \lg(n-1) \rceil}} \leq 1,$$

então

$$\left\lceil \frac{n-1}{2^{\lceil \lg(n-1) \rceil}} \right\rceil = 1.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\lceil \lg(n-1) \rceil - 1} 3^i \left(\left\lceil \frac{n-1}{2^{i+1}} \right\rceil + 1 \right) &= \sum_{i=0}^{\lceil \lg(n-1) \rceil - 1} 3^i \left\lceil \frac{n-1}{2^{i+1}} \right\rceil + \sum_{i=0}^{\lceil \lg(n-1) \rceil - 1} 3^i \\
&= \sum_{i=0}^{\lceil \lg(n-1) \rceil - 1} 3^i \left\lceil \frac{n-1}{2^{i+1}} \right\rceil + \frac{3^{\lceil \lg(n-1) \rceil} - 1}{2}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
& 3^{\lceil \lg(n-1) \rceil} f \left(\left\lceil \frac{n-1}{2^{\lceil \lg(n-1) \rceil}} \right\rceil + 1 \right) + 20 \sum_{i=0}^{\lceil \lg(n-1) \rceil - 1} 3^i \left(\left\lceil \frac{n-1}{2^{i+1}} \right\rceil + 1 \right) \\
&= 3^{\lceil \lg(n-1) \rceil} f(1+1) + 20 \left(\sum_{i=0}^{\lceil \lg(n-1) \rceil - 1} 3^i \left\lceil \frac{n-1}{2^{i+1}} \right\rceil + \frac{3^{\lceil \lg(n-1) \rceil} - 1}{2} \right) \\
&= 3^{\lceil \lg(n-1) \rceil} f(2) + 10 \times \left(3^{\lceil \lg(n-1) \rceil} - 1 \right) + 20 \sum_{i=0}^{\lceil \lg(n-1) \rceil - 1} 3^i \left\lceil \frac{n-1}{2^{i+1}} \right\rceil \\
&= 5 \times 3^{\lceil \lg(n-1) \rceil} + 10 \times 3^{\lceil \lg(n-1) \rceil} - 10 + 20 \sum_{i=0}^{\lceil \lg(n-1) \rceil - 1} 3^i \left\lceil \frac{n-1}{2^{i+1}} \right\rceil \\
&= 15 \times 3^{\lceil \lg(n-1) \rceil} + 20 \sum_{i=0}^{\lceil \lg(n-1) \rceil - 1} 3^i \left\lceil \frac{n-1}{2^{i+1}} \right\rceil - 10 \\
&= n^{((\lg 15 + \lceil \lg(n-1) \rceil)/\lg n) \lg 3} + 20 \sum_{i=0}^{\lceil \lg(n-1) \rceil - 1} 3^i \left\lceil \frac{n-1}{2^{i+1}} \right\rceil - 10.
\end{aligned}$$

2. $f(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é

$$X^3 - \frac{9}{2}X^2 + \frac{7}{2}X - 1 = (X - 3.6064)(X - (0.44681 - 0.27866i))(X - (0.44681 + 0.27866i))$$[1].

e

$$f(n) = a(3.6064)^n + b(0.44681 - 0.27866i)^n + c(0.44681 + 0.27866i)^n.$$

Os coeficientes a, b e c são dados por

$$\begin{aligned}
f(0) &= a(3.6064)^0 + b(0.44681 - 0.27866i)^0 + c(0.44681 + 0.27866i)^0, \\
f(1) &= a(3.6064)^1 + b(0.44681 - 0.27866i)^1 + c(0.44681 + 0.27866i)^1, \\
f(2) &= a(3.6064)^2 + b(0.44681 - 0.27866i)^2 + c(0.44681 + 0.27866i)^2,
\end{aligned}$$

[1] Resolução de Thiago Henrique Conte

ou seja

$$
\begin{aligned}
1 &= a+b+c, \\
2 &= a(3.6064)+b(0.44681-0.27866i)+c(0.44681+0.27866i), \\
3 &= a(3.6064)^2+b(0.44681-0.27866i)^2+c(0.44681+0.27866i)^2.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$a=0.247504, b=0.376248+1.38373i, ec=0.376248-1.38373i$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
f(n) &= a(3.6064)^n+b(0.44681-0.27866i)^n+c(0.44681+0.27866i)^n \\
&== 0.247504(3.6064)^n+(0.376248+1.38373i)(0.44681-0.27866i)^n \\
&+ (0.376248-1.38373i)(0.44681+0.27866i)^n, \text{ para todo } n\in\mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

3. $f(n)$ satisfaz uma RLnH cujo PC é

$$(X-4)(X-3)G,$$

onde G é o PC de uma RLH satisfeita por

$$g(n)=3^n.$$

Como

$$3^n = 1n^{0}3^n,$$

então g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G=(X-3)^{0+1}=(X-3),$$

e f satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X-3)(X-4)(X-3)=(X-3)^2(X-4),$$

e

$$f(n)=a3^n+bn^13^n+c4^n=a3^n+bn3^n+c4^n.$$

Os coeficientes a, b e c são dados por

$$
\begin{aligned}
f(0) &= a3^0+b0.3^0+c4^0, \\
f(1) &= a3^1+b1.3^1+c4^1, \\
f(2) &= a3^2+b2.3^2+c4^2,
\end{aligned}
$$

ou seja

$$
\begin{aligned}
0 &= a+0b+c, \\
1 &= 3a+3b+4c, \\
4 &= 9a+18b+16c.
\end{aligned}
$$

Como

$$a = -c, \tag{1}$$

então

$$\begin{aligned} 1 &= -3c + 3b + 4c, \\ 4 &= -9c + 18b + 16c, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 1 &= 3b + c, \\ 4 &= 18b + 7c, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} (1)\ 6 &= 18b + 6c, \\ (2)\ 4 &= 18b + 7c, \end{aligned}$$

e fazendo (2)-(1), vem que

$$c = -2 \text{ e } a = 2$$

e daí,

$$1 = 3b + (-2),$$

e portanto,

$$b = 1.$$

Portanto

$$f(n) = a3^n + bn3^n + c4^n = 2.3^n + 1n3^n - 2.4^n = 3^n(n+2) - 2.4^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

4.

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{i^2}{5^i}.$$

Usando a notação do Corolário **??** temos

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} g(i),$$

com

$$g(n) = n^2 \left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

Como

$$g(n) = n^2 \frac{1}{5}^n$$

podemos concluir que a função s satisfaz uma recorrência linear homogênea cujo polinômio característico é $(X-1)(X-\frac{1}{5})^{2+1} = (X-1)(X-\frac{1}{5})^3$.

Pelo Teorema **??**, temos

$$s(n) = a1^n + bn^0 5^{-n} + cn^1 5^{-n} + dn^2 5^{-n} = a + b5^{-n} + cn5^{-n} + dn^2 5^{-n},$$

onde (a,b,c,d) é dado pela solução do sistema

$$\begin{aligned}
s(0) &= a + b5^0 + c.0.5^0 + d.0^2.5^0,\\
s(1) &= a + b5^{-1} + c.1.5^{-1} + d.1^2.5^{-1},\\
s(2) &= a + b5^{-2} + c.2.5^{-2} + d.2^2.5^{-2},\\
s(3) &= a + b5^{-3} + c.3.5^{-3} + d.3^2.5^{-3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1)\ 0 &= a + b + 0c + 0d,\\
(2)\ \frac{1}{5} &= a + \frac{1}{5}b + \frac{1}{5}c + \frac{1}{5}d,\\
(3)\ \frac{9}{25} &= a + \frac{1}{25}b + \frac{2}{25}c + \frac{4}{25}d,\\
(4)\ \frac{54}{125} &= a + \frac{1}{125}b + \frac{3}{125}c + \frac{8}{125}d,
\end{aligned}$$

fazendo (5)=5×(2), (6)=25×(3) e (7)=125×(4), vem que,

$$\begin{aligned}
(1)\ 0 &= 1a + 1b,\\
(5)\ 1 &= 5a + 1b + 1c + 1d,\\
(6)\ 9 &= 25a + 1b + 2c + 4d,\\
(7)\ 54 &= 125a + 1b + 3c + 9d,
\end{aligned}$$

de (1), vem

$$a = -b,$$

e então substituindo $a = -b$ em (5), (6) e (7), temos

$$\begin{aligned}
(08)\ 1 &= 4a + 1c + 1d,\\
(09)\ 9 &= 24a + 2c + 4d,\\
(10)\ 54 &= 124a + 3c + 9d,
\end{aligned}$$

fazendo (11)=(09)-2×(08) e (12)=(10)-3×(08), vem que,

$$\begin{aligned}
(11)\ 7 &= 16a + 0c + 2d,\\
(12)\ 51 &= 112a + 0c + 6d,
\end{aligned}$$

fazendo (13)=(12)-3×(11), vem que,

$$(13)\ 30 = 64a,$$

e então

$$a = \frac{15}{32} \text{ e } b = -\frac{15}{32}.$$

Substituindo a em (11), vem que

$$d = -\frac{1}{4},$$

e então substituindo a, b e d em (5), vem que

$$c = -\frac{5}{8}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} s(n) &= a + b5^{-n} + cn5^{-n} + dn^2 5^{-n} \\ &= \frac{15}{32} - \frac{15}{32}5^{-n} - \frac{5}{8}n5^{-n} + \frac{1}{4}n^2 5^{-n}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$