CI-1237 — Matemática Discreta

Notas de Aula

Renato Carmo

Segundo Período Especial de Ensino Emergencial Remoto

novembro de 2020 a março de 2021

Sumário

Apresentação

Estas notas de aula foram preparadas especialmente para a oferta da disciplina Matemática Discreta (CI–1237) durante o Segundo Período Especial de Ensino Emergencial Remoto da Universidade Federal do Paraná, na contingência da pandemia de CoViD-19.

A oferta da disciplina está organizada em torno deste texto. O texto, por sua vez, está dividido em Unidades. Cada unidade do texto é complementada por uma exposição em vídeo. Ao início de cada unidade estão indicados exercícios recomendados. A Lista de Exercícios é o Apêndice A destas Notas de Aula.

Na página da disciplina você encontra o cronograma que estabelece a distribuição das unidades ao longo do período letivo.

Na página você também encontra "links" para todo o material de apoio (vídeos expositivos, "slides", sala de vídeo-conferência etc). Para facilitar sua localização, os nomes dos arquivos dos vídeos e dos "slides" são iguais (a menos da extensão) e iniciam pelo número da unidade que complementam.

Este arquivo pdf é um hipertexto. Seus "links" são ativos permitindo navegação com um leitor apropriado.

Apesar do esforço para revisar o texto a fim de prepará-lo para uso dos alunos neste período, é praticamente inevitável que erros e imprecisões ainda restem. Caso detecte algum, por favor, comunique enviando mensagem a `renato.carmo.rc@gmail.com` para que possamos corrigir.

Os exercícios estão classificados de acordo com a seguinte legenda.

-: exercícios de interesse marginal: complementam o assunto de alguma forma mas podem ser ignorados sem comprometer o entendimento.

@: exercícios programados para discussão em aula: procure fazê-los antes de serem discutidos em aula.

$\star$: exercícios prioritários: na impossibilidade de fazer todos, dê prioridade a estes.

#: exercícios mais difíceis e/ou trabalhosos: não comece por estes.

Bom estudo!

Parte I

Indução

Unidade 1

Proposições e Conectivos

Exercícios 1 a 5

Uma *proposição* é uma afirmação. Toda proposição é verdadeira ou é falsa.

O fato de que duas proposições A e B tem o mesmo valor será denotado por $A \equiv B$.

Denotamos por $\underline{\mathsf{V}}$ e $\underline{\mathsf{F}}$, respectivamente, os valores de *verdadeiro* e *falso*.

1.1 Conectivos

1.1.1 Negação, Conjunção e Disjunção

Definição. *Se A e B são proposições então*

não A *é uma proposição, chamada a* negação *de A.*

> *A proposição* **não** *A é verdadeira quando a proposição A é falsa.*

A **e** B *é uma proposição, chamada a* conjunção *de A e B,*

> *A proposição A* **e** *B é verdadeira quando A e B são ambas proposições verdadeiras.*

A **ou** B *é uma proposição, chamada a* disjunção *de A e B.*

> *A proposição A* **ou** *B é verdadeira quando ao menos uma dentre as proposições A e B é verdadeira.*

1.1.2 Implicação

Definição. *Se A e B são proposições então $A \implies B$ é uma proposição chamada* implicação *de A para B.*

Lê-se "se A então B" ou "A implica B".

A proposição A é chamada de antecedente *da implicação e a proposição B é chamada de* consequente *da implicação.*

A proposição $A \implies B$ é verdadeira quando A e B são ambas proposições verdadeiras ou quando A for uma proposição falsa, isto é,

$$A \implies B \equiv (A \text{ e } B) \text{ ou } (\text{ não } A).$$

Teorema 1. *A proposição $\underline{\mathsf{F}} \implies A$ é verdadeira qualquer que seja a proposição A.*

Demonstração. Exercício 5. $\square$

1.1.3 Dupla Implicação

Definição. *Se A e B são proposições então $A \iff B$ é uma proposição chamada* dupla implicação *entre A e B.*

Lê-se "A se e somente se B".

A proposição $A \iff B$ é verdadeira se as implicações $(A \implies B)$ e $(B \implies A)$ forem ambas verdadeiras, ou seja,

$$A \iff B \equiv (A \implies B) \text{ e } (B \implies A).$$

Unidade 2

Predicados e Quantificadores

Exercícios 6 a 10

Um *predicado* é uma "proposição parametrizada". Por exemplo,

$P(x)$**:** $x \leq x^2$.

O símbolo x recebe o nome de *variável livre* do predicado.

Predicados podem ter várias variáveis livres.

$Q(x, y)$**:** $x \leq y^2$.

Predicados não são verdadeiros nem falsos.

Quando as variáveis livres de um predicado são "especificadas" ou "instanciadas", o resultado é uma proposição que, como tal, é verdadeira ou falsa.

2.1 Quantificadores

Definição. *Se $P(x)$ é um predicado e X é um conjunto, então*

- $P(x),$ *para todo* $x \in X$, *e*
- $P(x),$ *para algum* $x \in X$,

são proposições.

"$P(x),$ **para todo** $x \in X$" *é uma proposição verdadeira se a proposição $P(x)$ for verdadeira para todo elemento $x \in X$.*

"$P(x),$ **para algum** $x \in X$" *é uma proposição verdadeira se a proposição $P(x)$ for verdadeira para algum elemento $x \in X$.*

Teorema 2. *Se $P(x)$ é um predicado, então*

$$\textit{não } (P(x),\ \textit{para todo } x \in X) \equiv (\textit{ não } P(x)),\ \textit{para algum } x \in X,$$

e

$$\textit{não } (P(x),\ \textit{para algum } x \in X) \equiv (\textit{ não } P(x)),\ \textit{para todo } x \in X.$$

Seja $P(x)$ um predicado qualquer e seja $X = \emptyset$.

Observe que

$$P(x),\ \text{para algum } x \in X,$$

é uma proposição falsa, pois não existe $x \in X$ tal que a proposição $P(x)$ seja verdadeira.

Do mesmo modo,

$$(\text{ não } P(x)),\ \text{para algum } x \in X,$$

também é uma proposição falsa.

Consequentemente

$$\text{não } ((\text{ não } P(x)),\ \text{para algum } x \in X),$$

é uma proposição verdadeira.

Como ()

$$\begin{aligned}\text{não } ((\text{ não } P(x)),\ \text{para algum } x \in X) &\overset{\text{T. 2}}{\equiv} (\text{ não } (\text{ não } P(x)),\ \text{para todo } x \in X)\\ &\equiv P(x),\ \text{para todo } x \in X,\end{aligned}$$

então

$$P(x), \text{ para todo } x \in X,$$

é uma proposição verdadeira.

Corolário 3. *Se $X = \emptyset$, então, para qualquer predicado $P(x)$ temos*

$$P(x), \text{ para todo } x \in X \text{ é uma proposição verdadeira,}$$

e

$$P(x), \text{ para algum } x \in X \text{ é uma proposição falsa.}$$

Unidade 3

Conjuntos, Inteiros, Somatórios e Produtórios

Exercícios 11 a 14

3.1 Conjuntos

A, B: conjuntos

Notação. *$\emptyset$ denota o conjunto vazio.*

$$
\begin{aligned}
a \in A &:= a \text{ é elemento do conjunto } A,\\
a \notin A &:= \text{ não } (a \in A),\\
A \subseteq B &:= a \in B, \text{ para todo } a \in A,\\
A \not\subseteq B &:= \text{ não } (A \subseteq B),\\
A = B &:= (A \subseteq B) \text{ e } (B \subseteq A),\\
A \cup B &:= \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\},\\
A \cap B &:= \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\},\\
A - B &:= \{a \mid a \in A \text{ e } a \notin B\},\\
|A| &:= \text{número de elementos do conjunto } A.
\end{aligned}
$$

Exercício 11 Seja A um conjunto finito e seja $B \subseteq A$. Prove que

$$A = (A - B) \cup B,$$

Resposta:

Podemos reescrever $A = (A - B) \cup B$ como

$$A \subseteq (A - B) \cup B$$

e

$$(A - B) \cup B \subseteq A.$$

Portanto, podemos dividir a prova de $A = (A - B) \cup B$ em duas partes:

1. Como $A \subseteq (A - B) \cup B$, tem-se que:

   $$x \in A \implies x \in ((A - B) \cup B)$$

   Seja $x \in A$, temos 2 casos:

   (a) $x \in B \implies x \in (A - B) \cup B$

   (b) $x \notin B \implies x \in (A - B) \implies x \in (A - B) \cup B$

2. Como $(A - B) \cup B \subseteq A$, tem-se que:

   $$x \in (A - B) \cup B \implies x \in A$$

   Seja $x \in (A - B) \cup B$, temos 2 casos:

   (a) $x \in (A - B) \implies x \in A \cap x \notin B \implies x \in A$

   (b) $x \notin (A - B) \implies \neg(x \in (A - B)) \implies x \notin A \cup x \in B \implies x \in B \implies x \in A$

3.2 Inteiros

A**:** conjunto,

z_1, z_2, z_3**:** inteiros,

$q \in \mathbb{Q}$,

$x \in \mathbb{R}$.

Definição. *O* intervalo inteiro *de* z_1 *a* z_2 *é o conjunto dos inteiros entre* z_1 *e* z_2*, ou seja*

$$[z_1..z_2] := \{z \in \mathbb{Z} \mid z_1 \leq z \leq z_2\}.$$

Definição. *Dado* $A \subseteq \mathbb{R}$*,*

- *o* mínimo *de* A *é um elemento* m *de* A *satisfazendo*

$$m \leq a, \text{ para todo } a \in A.$$

- *o* máximo *de* A *é um elemento* m *de* A *satisfazendo*

$$m \geq a, \text{ para todo } a \in A.$$

O mínimo e o máximo de A *são denotados* $\min A$ *e* $\max A$*, respectivamente.*

Conjuntos podem não ter mínimo ou máximo. Por exemplo,

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\}.$$

Notação. $\lg x$ *denota* $\log_2 x$*.*

3.3 Somatórios e Produtórios

Sejam

$f\colon A \to \mathbb{C}$

X**:** subconjunto finito de A.

a, b**:** inteiros.

Notação.

$$\sum_{x \in X} f(x)$$

denota a soma dos valores de $f(x)$ *para cada* $x \in X$*.*

Se $X = \emptyset$*, então*

$$\sum_{x \in X} f(x) = 0.$$

$$\sum_{i=a}^{b} f(i) := \sum_{x \in [a..b]} f(x).$$

Teorema 4. *Dados um conjunto finito X e $c \in \mathbb{C}$,*

$$\sum_{x \in X} c = c|X|.$$

Demonstração. Exercício 61 $\square$

Teorema 5. *Dados $f, g\colon A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ finito,*

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x).$$

Demonstração. Exercício 62 $\square$

Teorema 6. *Dada $f\colon A \to \mathbb{C}$, $X \subseteq A$ finito e $c \in \mathbb{C}$,*

$$\sum_{x \in X} cf(x) = c \sum_{x \in X} f(x).$$

Demonstração. Exercício 63 $\square$

Notação.

$$\prod_{x \in X} f(x)$$

denota o produto dos valores de $f(x)$ para cada $x \in X$.

Se $X = \emptyset$, então

$$\prod_{x \in X} f(x) = 1.$$

$$\prod_{i=a}^{b} f(i) := \prod_{x \in [a..b]} f(x).$$

Unidade 4

Aproximação Assintótica

Exercícios 17 a 25

Dadas $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dizemos que f e g são *aproximadamente iguais* (cfr. Ex. 7) se

$$\lim \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

Denotamos o fato de que f e g são aproximadamente iguais por

$$f(n) \approx g(n).$$

Teorema 7. *As funções $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ são tais que $f(n) \approx g(n)$ se e somente se existe $\varepsilon\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que*

$$f(n) = g(n)(1 + \varepsilon(n)),$$

e

$$\lim \varepsilon(n) = 0.$$

Demonstração. Exercício 23 □

Unidade 5

Piso e Teto (1)

Exercícios 26 a 41

Definição. *Dado $x \in \mathbb{R}$,*

o piso *de x é o maior inteiro menor ou igual a x, ou seja,*

$$\lfloor x \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}.$$

o teto *de x é o menor inteiro maior ou igual a x, ou seja,*

$$\lceil x \rceil := \min\{z \in \mathbb{Z} \mid z \geq x\}.$$

Teorema 8. *Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro que satisfaz*

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{R}$. Vamos provar que $\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro que satisfaz

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$

É imediato que existe um único inteiro z no conjunto

$$\{y \in \mathbb{R} \mid x - 1 < y \leq x\}.$$

Consequentemente, todo inteiro maior que z será também maior que x.

Noutras palavras, z é o maior inteiro menor ou igual a x e, portanto, $z = \lfloor x \rfloor$. □

Teorema 9. *Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\lceil x \rceil$ é o único inteiro que satisfaz*

$$x \leq \lceil x \rceil < x + 1.$$

Demonstração. Exercício 29 □

Corolário 10. *Para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $z \in \mathbb{Z}$ temos*

$$\lfloor x \rfloor + z = \lfloor x + z \rfloor.$$

Demonstração. Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{Z}$. Vamos provar que

$$\lfloor x \rfloor + z = \lfloor x + z \rfloor.$$

Do Teorema 8 temos que

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x,$$

e, portanto, para todo $z \in \mathbb{Z}$,

$$(x - 1) + z < \lfloor x \rfloor + z \leq x + z,$$

e, portanto,

$$(x + z) - 1 < \lfloor x \rfloor + z \leq x + z.$$

Como $\lfloor x \rfloor + z$ é inteiro, temos do Teorema 8 que

$$\lfloor x \rfloor + z = \lfloor x + z \rfloor.$$

□

Teorema 11. *Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos*

$$-\lceil x \rceil = \lfloor -x \rfloor.$$

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{R}$. Vamos provar que

$$-\lceil x \rceil = \lfloor -x \rfloor.$$

Do Teorema 9 temos que

$$x \leq \lceil x \rceil < x + 1,$$

e, portanto,

$$-x \geq -\lceil x \rceil > -(x + 1),$$

ou seja,

$$(-x) - 1 < -\lceil x \rceil \leq -x,$$

e daí, do Teorema 8 temos que

$$-\lceil x \rceil = \lfloor -x \rfloor$$

$\square$

Corolário 12. *Para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $z \in \mathbb{Z}$ temos*

$$z - \lfloor x \rfloor = \lceil z - x \rceil .$$

Demonstração. Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{Z}$. Vamos provar que

$$z - \lfloor x \rfloor = \lceil z - x \rceil .$$

Temos que

$$z - \lfloor x \rfloor = -(\lfloor x \rfloor - z).$$

Pelo Teorema 10 temos que

$$\lfloor x \rfloor - z = \lfloor x - z \rfloor$$

e, portanto,

$$z - \lfloor x \rfloor = -\lfloor x - z \rfloor ,$$

e daí, pelo Teorema 11

$$-\lfloor x - z \rfloor = \lceil -(x - z) \rceil = \lceil z - x \rceil .$$

$\square$

Teorema 13. *Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos*

$$\min \{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\} = \lfloor x \rfloor + 1$$

Demonstração. Seja $m := \min \{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$

Observe (Ex. 34) que m é o único inteiro tal que

$$x < m \leq x + 1,$$

isto é,

$$(x + 1) - 1 < m \leq (x + 1),$$

e daí (T. 8)

$$m = \lfloor x + 1 \rfloor \stackrel{\text{T. 10}}{=} \lfloor x \rfloor + 1.$$

$\square$

Teorema 14. *Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos*

$$\max\{k \in \mathbb{Z} \mid k < x\} = \lceil x - 1 \rceil,$$

Demonstração. A prova de que $\max\{k \in \mathbb{Z} \mid k < x\} = \lceil x - 1 \rceil$, para todo $x \in \mathbb{R}$ segue um argumento análogo em tudo a do Teorema 13 (Exercício 35) $\square$

Unidade 6

Piso e Teto (2)

Exercícios 39 a 45

$f \colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é integralizada (cfr. Ex. 6) em D se

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D.$$

Teorema 15. *Se $f \colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função integralizada, contínua e crescente, em D então*

$$\begin{aligned} \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor &= \lfloor f(x) \rfloor, \text{ e} \\ \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil &= \lceil f(x) \rceil, \end{aligned}$$

para todo $x \in D$.

Demonstração. Seja $f \colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função integralizada, contínua e crescente em D e seja $x \in D$. Vamos provar que

1. $\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor$, e que
2. $\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil$.

1. Vamos provar que
$$\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor.$$
Se x é inteiro, então
$$\lfloor x \rfloor = x,$$
e portanto,
$$f(\lfloor x \rfloor) = f(x).$$

e

$$\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor .$$

Se x não é inteiro, então

$$\lfloor x \rfloor < x,$$

e como f é crescente, então

$$f(\lfloor x \rfloor) < f(x).$$

Além disso, não pode haver nenhum inteiro z tal que

$$f(\lfloor x \rfloor) < z < f(x),$$

pois como f é contínua, teríamos $z = f(a)$ para algum a tal que

$$\lfloor x \rfloor < a < x,$$

e como $f(a)$ é inteiro e f é integralizada, então a seria um inteiro entre $\lfloor x \rfloor$ e x, o que não é possível.

Como x não é inteiro e f é integralizada, então $f(x)$ não pode ser inteiro e então

$$\lfloor f(x) \rfloor < f(x),$$

Como $\lfloor f(x) \rfloor$ é inteiro e $f(\lfloor x \rfloor)$ não é necessariamente inteiro, então

$$\lfloor f(x) \rfloor \leq f(\lfloor x \rfloor) < f(x),$$

e portanto,

$$\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor \leq \lfloor f(x) \rfloor \leq f(\lfloor x \rfloor) < f(x). \tag{6.1}$$

Finalmente, como $\lfloor f(x) \rfloor$ é um inteiro entre $f(\lfloor x \rfloor)$ e $\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor$, temos necessariamente

$$\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor .$$

2. A prova de que

$$\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil ,$$

segue um argumento em tudo análogo (Exercício 39).

□

Corolário 16. *Para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo inteiro positivo k*

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{k} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor, \\ \left\lceil \frac{\lceil x \rceil}{k} \right\rceil &= \left\lceil \frac{x}{k} \right\rceil. \end{aligned}$$

Demonstração. Seja k um inteiro positivo e seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = \frac{x}{k}.$$

Basta provar (Exercício 40) que f é uma função crescente e integralizada, e daí (T. 15) temos

$$\begin{aligned} \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor &= \lfloor f(x) \rfloor, \\ \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil &= \lceil f(x) \rceil. \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{k} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor, \\ \left\lceil \frac{\lceil x \rceil}{k} \right\rceil &= \left\lceil \frac{x}{k} \right\rceil. \end{aligned}$$

□

Unidade 7

O Princípio da Indução Finita

Definição. *Se* $A \subseteq \mathbb{N}$ *satisfaz*

1. $0 \in A$ *e,*
2. $[0..a] \subseteq A \implies a+1 \in A,$ *para todo* $a \in \mathbb{N}$*,*

então $A = \mathbb{N}$*.*

Formalmente,

$$((0 \in A) \text{ e } (([0..a] \subseteq A \implies a+1 \in A), \text{ para todo } a \in \mathbb{N})) \implies (A = \mathbb{N})$$

Unidade 8

Demonstração por Indução (1)

Teorema 17.
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ \textit{para todo} } n \in \mathbb{N},$$

Demonstração. Vamos provar que

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

ou seja,

vamos provar que

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde

$$P(n) : \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Vamos, então, provar que

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

provando que

$$A = \mathbb{N},$$

onde

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}.$$

Vamos provar que $A = \mathbb{N}$ provando que

1. $0 \in A$;

2. $[0..a] \subseteq A \implies a+1 \in A, \text{ para todo } a \in \mathbb{N}.$

1. Vamos provar que $0 \in A$,

   ou seja,

   vamos provar que a proposição $P(0)$ é verdadeira,

   isto é,

   vamos provar que
$$\sum_{i=1}^{0} i = \frac{0(0+1)}{2}.$$
   Por um lado, temos que
$$\sum_{i=1}^{0} i = 0.$$
   Por outro lado,
$$\frac{0(0+1)}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$
   E, portanto, é verdade que
$$\sum_{i=1}^{0} i = \frac{0(0+1)}{2}.$$
   Portanto, a proposição $P(0)$ é verdadeira.

   Portanto, $0 \in A$.

2. Vamos provar que
$$[0..a] \subseteq A \implies a+1 \in A, \text{ para todo } a \in \mathbb{N}.$$
   Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que $[0..a] \subseteq A$.

   Vamos provar que $a+1 \in A$,

   isto é,

   vamos provar que a proposição $P(a+1)$ é verdadeira

   ou seja,

   vamos provar que
$$\sum_{i=1}^{a+1} i = \frac{(a+1)((a+1)+1)}{2}.$$

Por um lado, temos

$$\sum_{i=1}^{a+1} i = \left(\sum_{i=1}^{a} i\right) + (a+1).$$

Como $[0..a] \subseteq A$, então $a \in A$,

ou seja,

a proposição $P(a)$ é verdadeira, isto é,

$$\sum_{i=1}^{a} i = \frac{a(a+1)}{2}.$$

Como

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{a+1} i &= \left(\sum_{i=1}^{a} i\right) + (a+1) \\
&= \left(\frac{a(a+1)}{2}\right) + (a+1) \\
&= \frac{a(a+1) + 2(a+1)}{2} \\
&= \frac{(a+2)(a+1)}{2} \\
&= \frac{(a+1)\left((a+1)+1\right)}{2},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^{a+1} i = \frac{(a+1)\left((a+1)+1\right)}{2}.$$

Portanto a proposição $P(a+1)$ é verdadeira.

Portanto $a+1 \in A$.

Portanto,

$$[0..a] \subseteq A \implies a+1 \in A, \text{ para todo } a \in \mathbb{N}.$$

Então $A = \mathbb{N}$, isto é,

$$\{n \in \mathbb{N} \mid P(n) = V\} = \mathbb{N},$$

e portanto a proposição

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

é verdadeira, ou seja

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

$\square$

Unidade 9

Demonstração por Indução (2)

Exercícios 47 a 46

Esquematicamente temos um predicado $P(n)$ e queremos uma prova da proposição

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Vamos provar que

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

provando que

$$A = \mathbb{N},$$

onde

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) = V\}.$$

Vamos provar que $A = \mathbb{N}$ provando que,

1. $0 \in A$
2. $[0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A, \text{ para todo } a \in A.$

1. Vamos provar que $0 \in A$.

   ...

   Portanto, $0 \in A$.

2. Vamos provar que

$$[0..a] \subseteq A \implies a+1 \in A, \text{ para todo } a \in \mathbb{N}.$$

Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que $[0..a] \subseteq A$.

Vamos provar que $a+1 \in A$.

...

Como $[0..a] \subseteq A$, então,

...

Portanto, $a+1 \in A$.

Portanto,

$$A = \mathbb{N}.$$

Portanto,

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

□

Observe que o conjunto A é desnecessário, no sentido de que é possível reformular o raciocínio sem definí-lo explicitamente.

Demonstração. Vamos provar que

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

provando que

1. A proposição $P(0)$ é verdadeira e,
2. $(P(k), \text{ para todo } k \in [0..a] \implies P(a+1)), \text{ para todo } a \in \mathbb{N}.$

1. Vamos provar que a proposição $P(0)$ é verdadeira.

   ...

   Portanto a proposição $P(0)$ é verdadeira.

2. Vamos provar que

$$P(k), \ \textsf{para todo } k \in [0..a] \implies P(a+1), \ \textsf{para todo } a \in \mathbb{N}.$$

Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que $P(k), \ \textsf{para todo } k \in [0..a]$.

Vamos provar que a proposição $P(a+1)$ é verdadeira.

...

Como a proposição $P(k)$ é verdadeira para todo $k \in [0..a]$, então,

...

Portanto, a proposição $P(a+1)$ é verdadeira.

Portanto,

$$P(k), \ \textsf{para todo } k \in [0..a] \implies P(a+1), \ \textsf{para todo } a \in \mathbb{N}.$$

Portanto,

$$P(n), \ \textsf{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

□

O esquema usual é o seguinte.

Demonstração. Vamos provar que

$$P(n), \ \textsf{para todo } n \in \mathbb{N},$$

por indução em n.

1. Vamos provar que $P(0)$.

   ...

   Portanto, $P(0)$.

2. Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que $P(k), \ \textsf{para todo } k \in [0..a]$.

   Vamos provar que $P(a+1)$.

   ...

   Como $P(k), \ \textsf{para todo } k \in [0..a]$ então ...

   ...

   Portanto, $P(a+1)$.

Portanto,

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

□

Nesta disciplina, o esquema para uma prova de indução será o seguinte, para enfatizar o fato de que a Base da Indução só pode ser determinada *depois* que o Passo da Indução for estabelecido.

Demonstração. Vamos provar que

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

por indução em n.

Hipótese de Indução: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$P(k), \text{ para todo } k \in [0..a].$$

Passo da Indução: Vamos provar que $P(a + 1)$.

...

Da hipótese de indução temos que ...

...

Portanto $P(a + 1)$.

Base da Indução: Vamos provar que $P(k)$, para todo $k \in \mathbb{N}$ ao qual o argumento do Passo de Indução não se aplica.

...

Portanto $P(k)$, para todo $k \in \mathbb{N}$ ao qual o argumento do Passo de Indução não se aplica.

Portanto,

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

□

Vamos reescrever a prova do Teorema 17 de acordo com este esquema.

Demonstração. Vamos provar que

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

por indução em n.

Hipótese da Indução: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}, \text{ para todo } k \in [0..a].$$

Passo da Indução: Vamos provar que

$$\sum_{i=1}^{a+1} i = \frac{(a+1)\left((a+1)+1\right)}{2}.$$

Temos que

$$\sum_{i=1}^{a+1} i = \left(\sum_{i=1}^{a} i\right) + (a+1).$$

Pela Hipótese da Indução temos que

$$\sum_{i=1}^{a} i = \frac{a(a+1)}{2},$$

e daí,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{a+1} i &= \left(\sum_{i=1}^{a} i\right) + (a+1) \\
&= \left(\frac{a(a+1)}{2}\right) + (a+1) \\
&= \frac{a(a+1) + 2(a+1)}{2} \\
&= \frac{(a+2)(a+1)}{2} \\
&= \frac{(a+1)\left((a+1)+1\right)}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{a+1} i = \frac{(a+1)\left((a+1)+1\right)}{2}.$$

Base da Indução: Vamos provar que

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}, \text{ para todo } k \in \{0\}$$

Por um lado, temos que

$$\sum_{i=1}^{0} i = 0.$$

Por outro lado,

$$\frac{0(0+1)}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}, \text{ para todo } k \in \{0\}.$$

$\square$

Unidade 10

Exemplos de Prova por Indução (1)

Exercícios 51 a 74

Exercício 51 Prove por indução em n que

$$2^n < n!, \text{ para todo } n \geq 4.$$

Resposta:

Vamos provar que

$$2^n < n!, \text{ para todo } n \geq 4,$$

por indução em n.

Hipótese de Indução: Seja $a \geq 4$ tal que

$$2^k < k!, \text{ para todo } k \in [4..a].$$

Passo da Indução: Vamos provar que $2^{a+1} < (a+1)!$.

Temos que

$$2^{a+1} = 2 \times 2^a.$$

Como $a \in [4..a]$, temos da H.I. que

$$2^a < a!,$$

e portanto,

$$2^{a+1} = 2 \times 2^a < 2 \times a!.$$

Por outro lado,

$$(a+1)! = (a+1) \times a!$$

e como $a \geq 4$ temos que

$$(a+1)! \geq (4+1) \times a! = 5 \times a!,$$

ou seja,

$$2^{a+1} < 2 \times a! < 5 \times a! \leq (a+1)!,$$

e portanto,

$$2^{a+1} < (a+1)!.$$

Base da Indução: Vamos provar que

$$2^4 < 4!.$$

Por um lado,

$$2^4 = 16.$$

e por outro lado,

$$4! = 24,$$

e portanto,

$$2^4 < 4!.$$

Unidade 11

Exemplos de Prova por Indução (2)

Definição. *A* sequência de Fibonacci *é a função* $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *dada por*

$$F(n) = \begin{cases} n, & \textsf{se } n \leq 1, \\ F(n-2) + F(n-1), & \textsf{se } n > 1. \end{cases}$$

Exercício 52 A *sequência de Fibonacci* é a função $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$F(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1 \\ F(n-1) + F(n-2), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

1. Prove por indução em n que

$$F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \textsf{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

2. Conclua que

$$F(n) \approx \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Resposta:

1. Vamos provar que

$$F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right),$$

por indução em n.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$F(k) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right), \text{ para todo } k \in [0..a],$$

Passo: Vamos provar que

$$F(a+1) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{a+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{a+1}\right).$$

Pela definição de F temos que para todo $a > 1$,

$$F(a+1) = F(a) + F(a-1).$$

Como $a \in [0..a]$, temos da HI que

$$F(a) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{a} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{a}\right).$$

Como $a-1 \in [0..a]$, temos da HI que

$$F(a-1) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{a-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{a-1}\right).$$

Então

$$
\begin{aligned}
&F(a+1) = F(a) + F(a-1)\\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^a - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^a\right) + \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{a-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{a-1}\right)\\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^a - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^a + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{a-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{a-1}\right)\\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^a + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{a-1}\right) - \left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^a + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{a-1}\right)\right)\\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{a-1}\left(1+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{a-1}\left(1+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)\right)\\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{a-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{a-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)\\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{a+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{a+1}\right).
\end{aligned}
$$

Base: Vamos provar que

$$F(b) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^b - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^b\right), \text{ para todo } b \in \{0,1\}$$

isto é, vamos provar que

$$
\begin{aligned}
F(0) &= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0\right)\\
F(1) &= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right).
\end{aligned}
$$

Por um lado,

$$
\begin{aligned}
F(0) &= 0,\\
F(1) &= 1.
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}(1-1)=\frac{\sqrt{5}}{5}(0)=0,$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right)&\\ &=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)\\ &=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{5}{5}\\ &=1.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}F(0)&=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0\right)\\ F(1)&=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right),\end{aligned}$$

Portanto,

$$F(n)=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right),\ \textsf{para todo } n\in\mathbb{N},$$

2. Como
$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\overset{\text{Ex. 19}}{\approx}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$
então
$$F(n)=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}(1+\epsilon(n))\right)^n,$$
para alguma função $\epsilon\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ tal que $\lim \epsilon(n)=0$.

Então,

$$F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n (1+\epsilon(n))^n\,.$$

Como

$$\lim \epsilon(n) = 0,$$

então

$$\lim(1+\epsilon(n)) = 1,$$

e daí,

$$\lim(1+\epsilon(n))^n = 1,$$

e, consequentemente,

$$F(n) \approx \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Unidade 12

Exemplos de Prova por Indução (3)

Exercício 58 Use o fato de que se A e B são conjuntos finitos e disjuntos entre si então

$$|A \cup B| = |A| + |B|,$$

para provar, por indução em n que, se $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos dois a dois disjuntos entre si, então,

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

Resposta:

Vamos provar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos dois a dois disjuntos entre si, então

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|,$$

por indução em n.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k \in [0..a]$, se $A_1, \ldots, A_k$ são conjuntos finitos dois a dois disjuntos entre si, então

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|.$$

Passo: Vamos provar que se $A_1, \dots, A_{a+1}$ são conjuntos finitos dois a dois disjuntos entre si, então

$$\left|\bigcup_{i=1}^{a+1} A_i\right| = \sum_{i=1}^{a+1} |A_i|.$$

Sejam $A_1, \dots, A_{a+1}$, conjuntos finitos dois a dois disjuntos entre si. Como $a+1>0$, então

$$\bigcup_{i=1}^{a+1} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{a} A_i\right) \cup A_{a+1}.$$

Se $a \geq 2$, então $2 \in [0..a]$ e daí, pela HI,

$$\left|\bigcup_{i=1}^{a+1} A_i\right| = \left|\left(\bigcup_{i=1}^{a} A_i\right) \cup A_{a+1}\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{a} A_i\right| + |A_{a+1}|.$$

Como $a \in [0..a]$, da HI temos também

$$\left|\bigcup_{i=1}^{a} A_i\right| = \sum_{i=1}^{a} |A_i|,$$

e daí,

$$\left|\bigcup_{i=1}^{a+1} A_i\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{a} A_i\right| + |A_{a+1}| = \sum_{i=1}^{a} |A_i| + |A_{a+1}| = \sum_{i=1}^{a+1} |A_i|.$$

Base: Vamos provar que

$$\left|\bigcup_{i=1}^{b} A_i\right| = \sum_{i=1}^{b} |A_i|, \text{ para todo } b \in [0..2].$$

Se $b=0$, temos

$$\left|\bigcup_{i=1}^{b} A_i\right| = 0,$$

e

$$\sum_{i=1}^{b} |A_i| = 0.$$

Se $b = 1$, temos

$$\left|\bigcup_{i=1}^{b} A_i\right| = |A_1|\,,$$

e

$$\sum_{i=1}^{b} |A_i| = |A_1|\,.$$

Se $b = 2$, temos

$$\left|\bigcup_{i=1}^{b} A_i\right| = |A_1 \cup A_2|\,,$$

e

$$\sum_{i=1}^{b} |A_i| = |A_1| + |A_2|\,,$$

que é fato conhecido.

Unidade 13

Descrições Recursivas (1)

Exercícios 75 a 90

Seja $l \colon \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$ dada por

$l(n)$: tamanho (número de dígitos) na representação binária de n.

Queremos uma expressão para $l(n)$.

Idéia: descrever através de uma recorrência.

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Temos,

n	$f(n)$	$l(n)$
1	1	1
2	2	2
3	2	2
4	3	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Será verdade que $f(n)$ é o número de dígitos na representação binária de n, para todo $n > 0$, isto é, será que

Teorema 18.

$$l(n) = f(n), \text{ para todo } n > 0.$$

Demonstração. Exercício 75 $\square$

Exercício 75 Sejam $l, f\colon \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$ dadas por

$l(n)$: tamanho (número de dígitos) na representação binária de n,

e

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Prove que

$$l(n) = f(n), \text{ para todo } n > 0.$$

Resposta:

Vamos provar que

$$l(n) = f(n), \text{ para todo } n > 0,$$

por indução em n

H.I.: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$l(k) = f(k) \text{ para todo } k \in [1..a].$$

Passo: Vamos provar que

$$l(a+1) = f(a+1)$$

Se $a + 1 > 1$, da definição de f temos que

$$f(a+1) = f\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1,$$

e que

$$\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \leq a,$$

e daí, temos pela HI que

$$l\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1 = f\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1$$

Seja então

$$m = l\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right),$$

e seja

$$d_0 d_1 \dots d_{m-1},$$

a representação binária de $\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor$, isto é,

$$\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor = d_{m-1}2^0 + d_{m-2}2^1 + \dots d_0 2^{m-1} = \sum_{i=0}^{m-1} d_i 2^{(m-1)-i}.$$

Se $a+1$ é par, então
$$\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor = \frac{a+1}{2}$$
e, portanto,
$$\frac{a+1}{2} = \sum_{i=0}^{m-1} d_i 2^{(m-1)-i},$$
ou seja,

$$a+1 = \sum_{i=0}^{m-1} d_i 2^{m-i} = \sum_{i=0}^{m-1} d_i 2^{m-i} + 02^0 = \sum_{i=0}^{m} d_i 2^{m-i},$$

para $d_m = 0$.

Noutras palavras,
$$d_0 d_1 \dots d_m,$$
a representação binária de $a+1$, isto é,

$$l(a+1) = m+1 = f\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1 = f(a+1).$$

Por argumento análogo concluímos que, também quando $a+1$ é ímpar, $l(a+1) = f(a+1)$.

Base: Vamos provar que
$$l(1) = f(1).$$

Por um lado, $l(1) = 1$ pois a representação binária de 1 tem 1 dígito.

Por outro lado, $f(1) = 1$.

Logo, é verdade $l(1) = f(1)$.

Unidade 14

Descrições Recursivas (2)

Exercícios 76 a 90

Teorema 19. *Se* $l\colon \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$ *é a função dada por*

$$l(n) = \begin{cases} 1, & \textsf{se } n = 1, \\ l\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \textsf{se } n > 1, \end{cases}$$

então

$$l(n) = \lfloor \lg n \rfloor + 1, \ \textit{para todo } n > 0.$$

Demonstração. Exercicio 76 □

Exercício 76 Seja $l\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$l(n) = \begin{cases} 1, & \textsf{se } n = 1, \\ l\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \textsf{se } n > 1. \end{cases}$$

Prove por indução em n que

$$l(n) = \lfloor \lg n \rfloor + 1, \ \textsf{para todo } n > 0.$$

Resposta:

Vamos provar que

$$l(n) = \lfloor \lg n \rfloor + 1, \ \textsf{para todo } n > 0,$$

por indução em n.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$l(k) = \lfloor \lg k \rfloor + 1, \text{ para todo } k \in [1..a].$$

Passo: Vamos provar que

$$l(a+1) = \lfloor \lg(a+1) \rfloor + 1.$$

Se $a + 1 > 1$, então

$$l(a+1) = l\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1,$$

e como $\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \in [0..a]$, então pela H.I. temos

$$\begin{aligned}
l\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) &= \left\lfloor \lg \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \right\rfloor + 1 \\
&\overset{\text{T 15}}{=} \left\lfloor \lg \frac{a+1}{2} \right\rfloor + 1 = \lfloor \lg(a+1) - 1 \rfloor + 1 \\
&\overset{\text{T 10}}{=} \lfloor \lg(a+1) \rfloor - 1 + 1 \\
&= \lfloor \lg(a+1) \rfloor .
\end{aligned}$$

Base: Vamos provar que

$$l(1) = \lfloor \lg(1) \rfloor + 1.$$

Basta verificar que

$$l(1) = 1,$$

e que,

$$\lfloor \lg(1) \rfloor + 1 = 0 + 1 = 1.$$

Corolário 20. *Para todo $n > 0$, a representação binária de n tem $\lfloor \lg n \rfloor + 1$ dígitos.*

Unidade 15

Descrições Recursivas (3)

Exercícios 77 a 90

Seja $b\colon \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$ dada por

$b(n)$: número de dígitos 1 na representação binária de n.

Idéia:

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f\left(\frac{n}{2}\right) & \text{se } n \text{ é par}, \\ f\left(\frac{n-1}{2}\right) + 1 & \text{se } n \text{ é ímpar}. \end{cases}$$

ou mais concisamente

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + (n \bmod 2) & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Teorema 21.

$$b(n) = f(n), \textit{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Exercício 77 □

Exercício 77 Sejam

$b(n)$: o número de dígitos 1 na representação binária de n.

e $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função dada por

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + (n \bmod 2) & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

1. Prove que o número de dígitos 1 na representação binária de n é $f(n)$, para todo $n \geq 0$.

2. Prove que
$$f(n) \leq \lfloor \lg n \rfloor + 1, \text{ para todo } n > 0.$$

Resposta:

1. Vamos provar que
$$b(n) = f(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$
por indução em n.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que
$$b(k) = f(k), \text{ para todo } k \in [0..a].$$

Passo: Vamos provar que
$$b(a+1) = f(a+1)$$

Para $a+1 > 0$, temos da definição de f que
$$f(a+1) = f\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + ((a+1) \bmod 2),$$
e como $\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \in [0..a]$, pela H.I. temos
$$b\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) = f\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right).$$
ou seja,
$$f(a+1) = b\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + ((a+1) \bmod 2).$$
Se $a+1$ é par, sabemos que
$$b(a+1) = b\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right),$$
ou seja
$$b(a+1) = b\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + ((a+1) \bmod 2)$$

e, portanto,

$$f(a+1) = b(a+1).$$

Se $a+1$ é ímpar, sabemos que

$$b(a+1) = b\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1,$$

ou seja

$$b(a+1) = b\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + ((a+1) \bmod 2)$$

e, portanto,

$$f(a+1) = b(a+1).$$

Base: Vamos provar que

$$b(0) = f(0).$$

Basta verificar que, pela definição de b,

$$b(0) = 0,$$

e que, pela definição de f,

$$f(0) = 0$$

2. Dos Exercícios 75 e 76 concluímos que o comprimento da representação binária de n é $\lfloor \lg n \rfloor + 1$, para todo $n > 0$.

   Do item anterior concluímos que $f(n)$ é o número de 1s na representação binária de n, para todo $n > 0$.

   Segue imediatamente que

$$f(n) \leq \lfloor \lg n \rfloor + 1, \text{ para todo } n > 0.$$

Unidade 16

Funções Iteradas (1)

Exercícios 92 a 99

O objetivo desta aula é exercitar a ideia de cálculo iterado de uma função que será intensivamente usada para resolver recorrências. Para resolver recorrências do tipo

$$f(n) = m(n)f(h(n)) + s(n),$$

é preciso saber determinar a expressão de $h^k(n)$, $s^k(n)$ e $m^k(n)$ a partir das expressões de $h(n)$, $s(n)$ e $m(n)$, respectivamente.

Definição. *Sejam A, B, C conjuntos e sejam $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$. A* composição *de f com g é a função $f \circ g\colon A \to C$ dada por*

$$f \circ g(x) := g(f(x)).$$

Definição. *Seja A um conjunto e $f\colon A \to A$ uma função. Para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos $f^n\colon A \to A$ como*

$$f^n(a) = (\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n vezes})(a) = \underbrace{f(f(\ldots f}_{n vezes}(a))).$$

Mais precisamente,

$$f^n := \begin{cases} I, & \text{se } n = 0, \\ f^{n-1} \circ f, & \text{se } n > 0, \end{cases}$$

onde $I\colon A \to A$ denota a função identidade, dada por

$$I(a) = a \text{ para todo } a \in A.$$

Exercício 91 Para cada uma das funções $f(x)$ abaixo, dê uma expressão para $f^n(x)$. Em cada caso, prove por indução em n que sua resposta está correta.

1. $f(x) = x + 1$.
2. $f(x) = x + 2$.
3. $f(x) = x + 3$.
4. $f(x) = x + s$.
5. $f(x) = 2x$.
6. $f(x) = 3x$.
7. $f(x) = mx$.
8. $f(x) = s + mx$.

Resposta:

1. $f(x) = x + 1$: $f^n(x) = x + n$
2. $f(x) = x + 2$: $f^n(x) = x + 2n$
3. $f(x) = x + 3$: $f^n(x) = x + 3n$
4. $f(x) = x + s$: $f^n(x) = x + ns$
5. $f(x) = 2x$: $f^n(x) = 2^n x$
6. $f(x) = 3x$: $f^n(x) = 3^n x$
7. $f(x) = mx$: $f^n(x) = m^n x$
8. $$f^n(x) = m^n x + s \sum_{i=0}^{n-1} m^i.$$

   Se $m = 1$,
   $$f^n(x) = 1^n x + s \sum_{i=0}^{n-1} 1^i = x + sn.$$

e, se $m \neq 1$ (Ex. 46),

$$\sum_{i=0}^{n-1} m^i = \frac{m^n - 1}{m - 1},$$

e, portanto,

$$f^n(x) = m^n x + s\frac{m^n - 1}{m - 1}.$$

Teorema 22. *Sejam $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $s, m \in \mathbb{R}$ tais que*

$$f(x) = s + mx, \ \textit{para todo } x \in \mathbb{R},$$

então, para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{N}$,

$$f^n(x) = \begin{cases} x + sn, & \text{se } m = 1, \\ m^n x + s\frac{m^n-1}{m-1}, & \text{se } m \neq 1. \end{cases}$$

Demonstração. Exercício 68 □

Unidade 17

Funções Iteradas (2)

Exercícios 92 a 99

Teorema 23. *Se $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ são funções contínuas, então $f \circ g\colon A \to C$ é uma função contínua.*

Demonstração. Exercício 42 (Cálculo I). □

Teorema 24. *Sejam $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ e $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ funções crescentes. Então $f \circ g\colon A \to C$ é crescente.*

Demonstração. Exercício 43 □

Teorema 25. *Sejam $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ e $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ funções integralizadas, isto é, satisfazendo*

$$\begin{aligned} f(x) \in \mathbb{Z} &\implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in A, \\ g(x) \in \mathbb{Z} &\implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in B. \end{aligned}$$

Então $f \circ g\colon A \to C$ é uma função integralizada.

Demonstração. Exercício 45 □

Corolário 26. *Sejam $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ e sejam $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ funções contínuas, crescentes e integralizadas. Então, para todo $x \in A$,*

$$\begin{aligned} \lfloor f \circ g(\lfloor x \rfloor) \rfloor &= \lfloor f \circ g(x) \rfloor, \text{ e} \\ \lceil f \circ g(\lceil x \rceil) \rceil &= \lceil f \circ g(x) \rceil, \end{aligned}$$

Demonstração. Exercício 44. $\square$

Corolário 27. *Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ e seja $f\colon A \to A$ uma função contínua, crescente e integralizada. Então, para todo $x \in A$, e todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned} \lfloor f^n(\lfloor x \rfloor) \rfloor &= \lfloor f^n(x) \rfloor \,, \\ \lceil f^n(\lceil x \rceil) \rceil &= \lceil f^n(x) \rceil \,. \end{aligned}$$

Demonstração. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ e seja $f\colon A \to A$ uma função contínua, crescente e integralizada.

Seja $x \in A$. Vamos provar por indução em n que

$$\begin{aligned} \lfloor f^n(\lfloor x \rfloor) \rfloor &= \lfloor f^n(x) \rfloor \,, \\ \lceil f^n(\lceil x \rceil) \rceil &= \lceil f^n(x) \rceil \,, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} \left\lfloor f^k(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor &= \left\lfloor f^k(x) \right\rfloor \,, \\ \left\lceil f^k(\lceil x \rceil) \right\rceil &= \left\lceil f^k(x) \right\rceil \,, \end{aligned}$$

para todo $k \in [0..a]$.

Passo: Vamos provar que

1. $\lfloor f^{a+1}(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f^{a+1}(x) \rfloor$, e
2. $\lceil f^{a+1}(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f^{a+1}(x) \rceil$.

1. Vamos provar que

$$\left\lfloor f^{a+1}(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor = \left\lfloor f^{a+1}(x) \right\rfloor .$$

Se $a + 1 > 0$, então

$$\left\lfloor f^{a+1}(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor = \lfloor f^a \circ f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(f^a(\lfloor x \rfloor)) \rfloor \,,$$

e como $1 \in [0..a]$ pela HI temos que

$$\left\lfloor f^1(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor = \left\lfloor f^1(x) \right\rfloor$$

isto é

$$\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor$$

então

$$\begin{aligned}\left\lfloor f^{a+1}(\lfloor x\rfloor)\right\rfloor &= \lfloor f(f^a(\lfloor x\rfloor))\rfloor\\ &= \lfloor f(\lfloor f^a(\lfloor x\rfloor)\rfloor)\rfloor\,.\end{aligned}$$

Como $a \in [0..a]$, pela HI também temos que

$$\lfloor f^a(\lfloor x\rfloor)\rfloor = \lfloor f^a(x)\rfloor$$

e portanto,

$$\begin{aligned}\left\lfloor f^{a+1}(\lfloor x\rfloor)\right\rfloor &= \lfloor f(\lfloor f^a(\lfloor x\rfloor)\rfloor)\rfloor\\ &= \lfloor f(\lfloor f^a(x)\rfloor)\rfloor\,.\end{aligned}$$

Finalmente, do Corolário 26 temos que

$$\left\lfloor f^1(\lfloor f^a(x)\rfloor)\right\rfloor = \left\lfloor f^1(f^a(x))\right\rfloor = \left\lfloor f^{a+1}(x)\right\rfloor\,.$$

2. A prova de que

$$\left\lceil f^{a+1}(\lceil x\rceil)\right\rceil = \left\lceil f^{a+1}(x)\right\rceil,$$

segue um argumento em tudo análogo ao acima.

Base: Vamos provar que f^k satisfaz

$$\begin{aligned}\left\lfloor f^k(\lfloor x\rfloor)\right\rfloor &= \left\lfloor f^k(x)\right\rfloor,\\ \left\lceil f^k(\lceil x\rceil)\right\rceil &= \left\lceil f^k(x)\right\rceil,\end{aligned}$$

para todo $k \leq 1$.

Para $k = 0$ temos

$$\left\lfloor f^0(\lfloor x\rfloor)\right\rfloor = \lfloor\lfloor x\rfloor\rfloor = \lfloor x\rfloor\,,$$

e

$$\left\lfloor f^0(x)\right\rfloor = \lfloor x\rfloor\,,$$

e portanto,

$$\left\lfloor f^0(\lfloor x\rfloor)\right\rfloor = \left\lfloor f^0(x)\right\rfloor.$$

Pelo mesmo argumento concluímos que

$$\left\lceil f^0(\lceil x\rceil)\right\rceil = \left\lceil f^0(x)\right\rceil$$

Para $k = 1$ temos
$$\left\lfloor f^1(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor = \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor ,$$
e como a função f é contínua, crescente e integralizada, temos do Teorema 15 que
$$\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor .$$
Como
$$\left\lfloor f^1(x) \right\rfloor = \lfloor f(x) \rfloor ,$$
concluímos que
$$\left\lfloor f^1(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor = \left\lfloor f^1(x) \right\rfloor .$$
Pelo mesmo argumento concluímos que
$$\left\lceil f^1(\lceil x \rceil) \right\rceil = \left\lceil f^1(x) \right\rceil$$
□

Corolário 28. *Sejam $k \neq 0$ e $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que*
$$f(x) = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor .$$
Então
$$f^n(x) = \left\lfloor \frac{x}{k^n} \right\rfloor , \text{ *para todo* } n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Exercícios 93 □

Parte II

Recorrências

Unidade 18

Recorrências (1)

Uma *relação de recorrência* é uma descrição recursiva de uma função $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$ como, por exemplo,

$$f(n) = f(n-1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Observe que uma relação de recorrência para uma função f não determina necessariamente a função. Por exemplo, existem várias funções $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$ que satisfazem a relação de recorrência acima.

Por outro lado, neste mesmo exemplo, basta escolher o valor de $f(k)$ para algum $k \in \mathbb{N}$ para determinar a função.

Resolver uma recorrência é obter uma expressão não recursiva para uma função a partir de uma relação de recorrência dada.

No exemplo acima, se $n \geq 1$, então

$$f(n) = f(n-1) + 1.$$

Se $f(n-1) \geq 1$, então

$$f(n) = f(n-1) + 1 = (f((n-1)-1) + 1) + 1 = f(n-2) + 2.$$

Se $f(n-2) \geq 1$, então

$$f(n) = f(n-2) + 2 = (f((n-2)-1) + 1) + 2 = f(n-3) + 3.$$

Considere a última vez que podemos aplicar a relação de recorrência e chamemos esta de a u-ésima aplicação. Neste caso teremos

$$f(n) = f(n-u) + u,$$

e, além disso, u será o menor inteiro tal que

$$n - u < 1,$$

isto é,

$$u = \min \{k \in \mathbb{N} \mid n - k < 1\}.$$

Como

$$n - k < 1$$

se e somente se

$$n - k \leq 0$$

se e somente se

$$k \geq n,$$

então

$$u = \min \{k \in \mathbb{N} \mid n - k \leq 0\} = \min \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\} = \lceil n \rceil = n,$$

e

$$f(n) = f(n - u) + u = f(n - n) + n = f(0) + n.$$

Em resumo, temos que se

$$f(n) = f(n - 1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1,$$

então

$$f(n) = f(0) + n, \text{ para todo } n \geq 1,$$

que é a solução da recorrência do exemplo inicial.

Observando que

$$f(0) + 0 = f(0),$$

podemos escrever

$$f(n) = f(0) + n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Unidade 19

Recorrências (2)

Vamos aplicar a mesma ideia para resolver o Exercício 100.

$$f(n) = f(n-2) + 1, \text{ para todo } n \geq 2.$$

Para todo $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} f(n) &= f(n-2) + 1 \\ &= (f((n-2)-2)+1)+1 = f(n-4)+2 \\ &= (f((n-4)-2)+1)+2 = f(n-6)+3 \\ &= \dots \\ &= f(n-2u)+u, \end{aligned}$$

onde

$$u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid n - 2k < 2\}.$$

Como

$$n - 2k < 2,$$

se e somente se

$$2k > n - 2,$$

ou seja,

$$k > \frac{n-2}{2},$$

então

$$u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid n - 2k < 2\} = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid k > \frac{n-2}{2}\right\} \overset{\text{T 13}}{=} \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Então

$$f(n) = f(n-2u) + u = f\left(n - 2\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)\right) + \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$$

Para n par, temos

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n}{2},$$

e daí

$$f\left(n - 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = f\left(n - 2\left(\frac{n}{2}\right)\right) + \frac{n}{2} = f(0) + \frac{n}{2}.$$

Para n ímpar, temos

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n-1}{2},$$

e daí

$$f\left(n - 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = f\left(n - 2\left(\frac{n-1}{2}\right)\right) + \frac{n-1}{2} = f(1) + \frac{n-1}{2}.$$

Então, para todo $n \geq 2$,

$$f(n) = \begin{cases} f(0) + \frac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par,} \\ f(1) + \frac{n-1}{2}, & \text{se } n \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

ou, equivalentemente,

$$f(n) = f(n \bmod 2) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Unidade 20

Recorrências (3)

Exercícios 103 a 108

Vamos generalizar a ideia vista nas unidades anteriores para recorrências do tipo

$$f(n) = f(h(n)) + s(n), \text{ para todo } n \geq n_0.$$

onde $f, s \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$.

Então,

$$\begin{aligned}
f(n) &= f(h(n)) + s(n) \\
&= f(h(h(n)) + s(h(n)) + s(n) \\
&= f(h^2(n)) + s(h(n)) + s(n) \\
&= f(h(h^2(n))) + s(h^2(n)) + s(h(n)) + s(n) \\
&= f(h^3(n)) + s(h^2(n)) + s(h(n)) + s(n) \\
&= \ldots \\
&= f(h^u(n)) + s(h^{u-1}(n)) + \ldots + s(h(n)) + s(n) \\
&= f(h^u(n)) + s(h^{u-1}(n)) + \ldots + s(h^1(n)) + s(h^0(n)) \\
&= f(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)),
\end{aligned}$$

onde

$$u = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0 \right\}.$$

Unidade 21

Recorrências (4)

Exercício 101 Resolva a seguinte recorrência.

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Resposta:

Fazendo

$$f(n) = f(h(n)) + 1, \text{ para todo } n \geq n_0,$$

temos

$$\begin{aligned} h(n) &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \\ h^k(n) &= \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor, \\ s(n) &= 1, \\ n_0 &= 2 \end{aligned}$$

Então

$$f(n) = f(h^u(n)) + u = f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + u.$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor < 2\right\}.$$

Como

$$\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor < 2,$$

se e somente se

$$\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor \leq 1,$$

se e somente se

$$\frac{n}{2^k} < 2,$$

ou seja,

$$2^{k+1} > n,$$

e portanto,

$$k + 1 > \lg n,$$

isto é

$$k > \lg n - 1,$$

então

$$\begin{aligned} u &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor < 2\right\} \\ &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid k > \lg n - 1\right\} \\ &\overset{\text{T.13}}{=} \lfloor \lg n - 1 \rfloor + 1 \\ &= \lfloor \lg n \rfloor . \end{aligned}$$

Então,

$$f(n) = f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + u = f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor\right) + \lfloor \lg n \rfloor$$

Como (Ex. 37)

$$\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor = 1, \text{ para todo } n > 0,$$

então

$$f(n) = f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor\right) + \lfloor \lg n \rfloor = f(1) + \lfloor \lg n \rfloor = 1 + \lfloor \lg n \rfloor = \lfloor \lg n \rfloor + 1,$$

ou seja,

$$f(n) = \lfloor \lg n \rfloor + 1, \text{ para todo } n \geq 2.$$

Como

$$\lfloor \lg 1 \rfloor + 1 = 0 + 1 = 1 = f(1),$$

então,

$$f(n) = \lfloor \lg n \rfloor + 1, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Unidade 22

Recorrências (5)

Exercício 102 Resolva a seguinte recorrência.

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + (n \bmod 2) & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

Resposta:

A solução é

$$f(n) = f(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)),$$

onde

$$\begin{aligned} h(n) &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \\ h^k(n) &= \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor, \\ s(n) &= n \bmod 2, \\ n_0 &= 1, \\ u &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} f(n) &= f(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \\ &= f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u-1} \left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \bmod 2\right) \end{aligned}$$

Como
$$h^k(n) < n_0,$$
se e somente se
$$\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor < 1,$$
ou seja,
$$\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor \leq 0,$$
ou seja,
$$\frac{n}{2^k} < 1,$$
ou seja,
$$2^k > n,$$
e portanto,
$$k > \lg n,$$
então
$$\begin{aligned} u &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\} \\ &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid k > \lg n\right\} \\ &\overset{\text{T. 13}}{=} \lfloor \lg n + 1 \rfloor \\ &\overset{\text{T. 10}}{=} \lfloor \lg n \rfloor + 1, \end{aligned}$$
e
$$\begin{aligned} f(n) &= f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u-1} \left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \bmod 2\right) \\ &= f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1}} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor + 1 - 1} \left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \bmod 2\right) \\ &= f(0) + \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \bmod 2\right) \\ &= \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \bmod 2\right). \end{aligned}$$
Então
$$f(n) = \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \bmod 2\right), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Unidade 23

Recorrências (6)

Exercícios 109 a 111

Vamos generalizar a ideia vista nas unidades anteriores para recorrências do tipo

$$f(n) = m(n)f(h(n)), \text{ para todo } n \geq n_0.$$

onde $f, m : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$.

Então,

$$\begin{aligned}
f(n) &= m(n)f(h(n)) \\
&= m(n)m(h(n))f(h(h(n)) \\
&= m(n)m(h(n))f(h^2(n)) \\
&= m(n)m(h(n))m(h^2(n))f(h(h^2(n))) \\
&= m(n)m(h(n))m(h^2(n))f(h^3(n)) \\
&= \ldots \\
&= m(n)m(h(n))\ldots m(h^{u-1}(n))f(h^u(n)) \\
&= m(h^0(n))m(h^1(n))\ldots m(h^{u-1}(n))f(h^u(n)) \\
&= f(h^u(n))\prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)),
\end{aligned}$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}.$$

Unidade 24

Recorrências (7)

Exercícios 109 a 109

Exercício 109 Dado $q \in \mathbb{C}$, uma *progressão geométrica* de razão q é uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = q, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

1. Expresse a função f acima por meio de uma recorrência.

2. Resolva esta recorrência.

Resposta:

1. $$f(n) = qf(n-1), \text{ para todo } n \geq 1.$$

2. $$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)),$$

   onde

$$\begin{aligned} h(n) &= n-1, \\ m(n) &= q, \\ u &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}, \\ n_0 &= 1. \end{aligned}$$

Então

$$h^k(n) = n - k,$$

e

$$h^k(n) < n_0$$

se e somente se

$$n - k < 1,$$

ou seja,

$$k > n - 1$$

e

$$\begin{aligned} u &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid n - k \leq n_0\} \\ &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid k > n - 1\} \\ &= n, \end{aligned}$$

e

$$h^u(n) = h^n(n) = n - n = 0,$$

e

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) = f(0) \prod_{i=0}^{n-1} q = f(0)q^n.$$

Unidade 25

Recorrências (8)

Exercícios 112 a 114

Vamos generalizar a ideia vista nas unidades anteriores para recorrências do tipo

$$f(n) = m(n)f(h(n)) + s(n), \ \text{para todo } n \geq n_0.$$

onde $f, s, m \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$.

Então,

$$\begin{aligned}
f(n) &= m(n)f(h(n)) + s(n) \\
&= m(n)(m(h(n))f(h^2(n) + s(h(n))) + s(n) \\
&= m(n)m(h(n))f(h^2(n) + m(n)s(h(n)) + s(n) \\
&= m(n)m(h(n))(m(h^2(n))f(h^3(n)) + s(h^2(n))) + m(n)s(h(n)) + s(n) \\
&= m(n)m(h(n))m(h^2(n))f(h^3(n)) + m(n)m(h(n))s(h^2(n)) + m(n)s(h(n)) + s(n) \\
&= \dots \\
&= f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)),
\end{aligned}$$

onde

$$u = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0 \right\}.$$

Teorema 29. *Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f, m, s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tais que*

$$f(n) = m(n)f(h(n)) + s(n), \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Então

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}.$$

Demonstração. Exercício 99. □

Unidade 26

Recorrências (9)

Exercício 113 O número de comparações no pior caso de uma execução do algoritmo MergeSort para um vetor de n elementos é dado pela recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Do Exercício 56 temos que $T^-(n) \leq T(n) \leq T^+(n)$, onde

$$T^-(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ 2T^-\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

e

$$T^+(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ 2T^+\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

1. Resolva as recorrências de $T^-(n)$ e $T^+(n)$.
2. Use as soluções obtidas e o Exercício 41 para concluir que $T(n) \approx n \lg n$.

Resposta:

1. Do Teorema 29, temos

   $$T^-(n) = T^-(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

   onde

   $$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\},$$

e

$$\begin{aligned} h(n) &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \\ m(n) &= 2, \\ s(n) &= n-1, \\ n_0 &= 2. \end{aligned}$$

Então, dado $i \in \mathbb{N}$,

$$h^i(n) = \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor,$$

e

$$m(h^i(n)) = 2,$$

e

$$\prod_{i=0}^{u-1} m(h^j(n)) = \prod_{i=0}^{u-1} 2 = 2^u.$$

e

$$s(h^i(n)) = h^i(n) - 1 = \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 1$$

e

$$\prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) = \prod_{j=0}^{i-1} 2 = 2^i.$$

Então

$$\begin{aligned} T^-(n) = T^-\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) 2^u + \sum_{i=0}^{u-1} \left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 1\right) 2^i \\ = 2^u T\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u-1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - \sum_{i=0}^{u-1} 2^i \\ = 2^u T\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u-1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - \frac{2^{(u-1)+1} - 1}{2-1} \\ = 2^u T\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u-1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 2^u + 1, \end{aligned}$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor < 2\right\}.$$

Como

$$\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor < 2,$$

se e somente se

$$\frac{n}{2^k} < 2,$$

ou seja,

$$n < 2^{k+1},$$

ou seja,

$$k + 1 > \lg n,$$

isto é,

$$k > \lg n - 1.$$

Então,

$$\begin{aligned} u = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor < 2 \right\} \\ = \min \{ k \in \mathbb{N} \mid k > \lg n - 1 \} \overset{\text{T. } 13}{=} \lfloor \lg n - 1 + 1 \rfloor \\ = \lfloor \lg n \rfloor . \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} T^-(n) &= 2^u T\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u-1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 2^u + 1 \\ &= 2^{\lfloor \lg n \rfloor} T\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 2^{\lfloor \lg n \rfloor} + 1 \\ &\overset{\text{Ex. } 37}{=} 2^{\lfloor \lg n \rfloor} T(1) + \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 2^{\lfloor \lg n \rfloor} + 1 \\ &= \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 2^{\lfloor \lg n \rfloor} + 1 \end{aligned}$$

Por desenvolvimento análogo chegamos a

$$T^+(n) = \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} 2^i \left\lceil \frac{n}{2^i} \right\rceil - 2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} + 1.$$

2. Do Exercício 56 temos

$$T^-(n) \leq T(n) \leq T^+(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Do Exercício 41 temo que

$$
\begin{aligned}
T^{-}(n) &\approx n \lg n, \\
T^{+}(n) &\approx n \lg n.
\end{aligned}
$$

Consequentemente (Ex. 22)

$$T(n) \approx n \lg n.$$

Unidade 27

Recorrências Lineares Homogêneas (1)

Exercícios 115 a 117

Definição. *Uma recorrência linear homogênea (RLH) é uma recorrência da forma*

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$.

Por exemplo,

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2), \text{ para todo } n \geq 2.$$

No restante desta unidade, vamos resolver usar a recorrência acima como exemplo de como resolver RLHs.

Na unidade seguinte vamos generalizar as ideias apresentadas aqui.

Se A e B são conjuntos, B^A denota o conjunto das funções $A \to B$. Dados $z \in \mathbb{C}$ e $f, g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ definimos as funções $f + g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ e $zf \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ por

$$\begin{aligned} (f+g)(n) &= f(n) + g(n), \text{ e} \\ (zf)(n) &= zf(n). \end{aligned}$$

Por exemplo, sejam

$$\begin{aligned} f(n) &= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \\ g(n) &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n, \\ z &= \frac{\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

Neste caso,

$$f(n) + g(n) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

e

$$zf(n) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Teorema 30. *$(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.*

Demonstração. Exercício 116. □

Seja agora $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ o conjunto das funções que satisfazem a recorrência de Fibonacci, isto é,

$$\mathcal{F} := \left\{ f \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid f(n) = f(n-1) + f(n-2), \text{ para todo } n \geq 2 \right\}.$$

Se $f, g \in \mathcal{F}$ então, para todo $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} (f+g)(n) &= f(n) + g(n) \\ &= (f(n-1) + f(n-2)) + (g(n-1) + g(n-2)) \\ &= (f(n-1) + g(n-1)) + (f(n-2) + g(n-2)) \\ &= (f+g)(n-1) + (f+g)(n-2), \end{aligned}$$

ou seja, dados $f, g \in \mathcal{F}$, temos $f + g \in \mathcal{F}$.

Do mesmo modo, se $z \in \mathbb{C}$ então, para todo $n \geq 2$,

$$(zf)(n) = z(f(n)) = z(f(n-1) + f(n-2)) = (zf)(n-1) + (zf)(n-2),$$

ou seja, dado $z \in \mathbb{C}$ e $f \in \mathcal{F}$, temos $zf \in \mathcal{F}$.

Não é difícil concluir (Exercício 118) que o conjunto $\mathcal{F}$ das funções que satisfazem a recorrência de Fibonacci é um subespaço vetorial de $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$.

Veremos mais adiante que trata-se de um subespaço de dimensão 2 e assim, se $\{f_1, f_2\}$ é uma base de $\mathcal{F}$, então toda função que satisfaz a recorrência de Fibonacci pode ser escrita como combinação linear de f_1 e f_2, isto é, para todo $f \in \mathcal{F}$ existem $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Vamos agora determinar uma base de $\mathcal{F}$.

Observe inicialmente que se $f^-, f^+ \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ são tais que

$$\begin{aligned} f^-(n) &= f^-(n-2) + f^-(n-2), \\ f^+(n) &= f^+(n-1) + f^+(n-1), \end{aligned}$$

para todo $n \geq 4$ e, além disso,

$$\begin{aligned} f^-(2) = f(2) = f^+(2), \text{ e} \\ f^-(3) = f(3) = f^+(3), \end{aligned}$$

então é simples provar por indução em n que (Exercício 90)

$$f^-(n) \leq f(n) \leq f^+(n), \text{ para todo } n \geq 2.$$

Como (Exercício 110),

$$\begin{aligned} f^-(n) &= (\sqrt{2})^{n+(n \bmod 2)}, \text{ para todo } n \geq 4, \text{ e} \\ f^+(n) &= 2^{n-2}, \text{ para todo } n \geq 2, \end{aligned}$$

então

$$(\sqrt{2})^{n+(n \bmod 2)} \leq f(n) \leq 2^{n-2}, \text{ para todo } n \geq 4,$$

e, portanto,

$$(\sqrt{2})^n \leq (\sqrt{2})^{n+(n \bmod 2)} \leq f(n) \leq 2^{n-2} \leq 2^n, \text{ para todo } n \geq 4,$$

ou seja,

$$(\sqrt{2})^n \leq f(n) \leq 2^n, \text{ para todo } n \geq 4,$$

Com isso concluímos que $f(n)$ tem seu crescimento limitado, tanto inferior como superiormente, por funções exponenciais.

Vamos então procurar uma base de $\mathcal{F}$ composta por funções exponenciais

Seja $r \in \mathbb{C} - \{0\}$ e seja $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(n) = r^n.$$

Para ter $f \in \mathcal{F}$ é necessário que

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2), \text{ para todo } n \geq 2,$$

ou seja

$$r^n = r^{n-1} + r^{n-2}, \text{ para todo } n \geq 2,$$

e portanto,

$$r^n - r^{n-1} - r^{n-2} = 0, \text{ para todo } n \geq 2,$$

e portanto,

$$r^{n-2}(r^2 - r - 1) = 0, \text{ para todo } n \geq 2,$$

e como $r \neq 0$, então

$$r^2 - r - 1 = 0,$$

ou seja,

$$r \in \left\{ r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}.$$

Então as únicas funções não nulas do tipo

$$f(n) = r^n,$$

que satisfazem a recorrência de Fibonacci são

$$\begin{aligned} f_1(n) &= r_1^n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \\ f_2(n) &= r_2^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

Como f_1 e f_2 são linearmente independentes em $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ (Exercício 117) e $\mathcal{F}$ é um subespaço vetorial de dimensão 2 de $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$, concluímos que o conjunto $\{f_1, f_2\}$ forma uma base de $\mathcal{F}$.

Consequentemente, toda função em $\mathcal{F}$ pode ser escrita como combinação linear das funções f_1 e f_2.

Em particular a sequência de Fibonacci, que é a função $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ dada por

$$F(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ F(n-2) + F(n-1), & \text{se } n > 1, \end{cases}$$

pode ser escrita como

$$F = c_1 f_1 + c_2 f_2,$$

e, portanto,

$$F(n) = c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

é a solução da recorrência de Fibonacci.

Para determinar os valores de c_1 e c_2, usamos

$$\begin{aligned} F(0) &= 0, \text{ e} \\ F(1) &= 1, \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} F(0) &= c_1 f_1(0) + c_2 f_2(0), \text{ e} \\ F(1) &= c_1 f_1(1) + c_2 f_2(1), \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} F(0) &= c_1 r_1^0 + c_2 r_2^0, \text{ e} \\ F(1) &= c_1 r_1^1 + c_2 r_2^1. \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 + c_2, \\ 1 &= c_1 r_1 + c_2 r_2, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$c_1 = -c_2,$$

e

$$1 = -c_2 r_1 + c_2 r_2 = c_2(r_2 - r_1),$$

e, portanto,

$$c_2 = \frac{1}{r_2 - r_1} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

e, consequentemente,

$$c_1 = -c_2 = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} F(n) &= c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n) \\ &= -\frac{\sqrt{5}}{5} r_1^n + \frac{\sqrt{5}}{5} r_2^n \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5} \left(r_2^n - r_1^n \right) \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \end{aligned}$$

Unidade 28

Recorrências Lineares Homogêneas (2)

Exercícios 105 a 122

Nesta unidade generalizamos as ideias vistas na Unidade anterior.

Definição. *Dados $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$, denotamos por $\mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$ o conjunto das funções $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ que satisfazem a recorrência*

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k,$$

isto é,

$$\mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k) := \{f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C} \mid \\ f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \\ \text{para todo } n \geq k\}.$$

Teorema 31. *Dados $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$, o conjunto $\mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$ é um subespaço vetorial de $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$.*

Demonstração. Exercício 118 □

Definição. *O* polinômio característico *do espaço vetorial $\mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$ é o polinômio*

$$X^k - a_1 X^{k-1} - \ldots - a_{k-1} X^1 - a_k.$$

No que segue fazemos referência a funções do tipo $n \mapsto n^j r^n$, onde $j \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{C}$. Nestes casos, adotamos a convenção de que $f(n) = r^n$ quando $j = 0$, isto é[1], $n \mapsto n^0 r^n = n \mapsto r^n$..

[1]Esta convenção contorna a indefinição de $f(0)$ quando $f(n) = n^0 r^n$.

A relação entre o espaço vetorial $\mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$ e seu polinômio característico é dada pelo Teorema 32.

Teorema 32. *O número $r \in \mathbb{C}$ é raiz de multiplicidade m do polinômio característico de $\mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$ se e somente se m é o maior inteiro tal que a função $n^{m-1}r^n$ pertence ao espaço vetorial $\mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$.*

Corolário 33. *Dado $r \neq 0$, a função $n^{m-1}r^n$ pertence ao espaço vetorial $\mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$ se e somente se $(X - r)^m$ divide seu polinômio característico.*

Teorema 34. *Se $r \in \mathbb{C}$ é uma raiz de multiplicidade m do polinômio característico de $\mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$, então o conjunto*

$$B(r) = \left\{n^j r^n \mid 0 \leq j < m\right\}$$

é linearmente independente em $\mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$.

Corolário 35. *Sejam $r_1, \ldots, r_l$ as distintas raízes do polinômio característico de $\mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$ com multiplicidades $m_1, \ldots, m_l$, respectivamente. Então o conjunto*

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{l} B(r) = \bigcup_{i=1}^{l} \left\{n^j r_i^n \mid 0 \leq j < m_i\right\}$$

é uma base de $\mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$.

Corolário 36. *Se $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfaz*

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k,$$

então

$$f(n) = \sum_{i=1}^{l} \left(\sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{i,j} n^j r_i^n \right), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde $r_1, \ldots, r_l$ são as distintas raízes do polinômio característico de $\mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$ com multiplicidades $m_1, \ldots, m_l$, respectivamente, e $\{c_{i,j} \mid 1 \leq i \leq l \text{ e } 0 \leq j < m_i\}$ é a solução do sistema

$$f(a) = \sum_{i=1}^{l} \left(\sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{i,j} a^j r_i^a \right), 0 \leq a < k.$$

Unidade 29

Recorrências Lineares Homogêneas (3)

Exercício 119a

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 2 \\ 5f(n-1) - 7f(n-2) + 3f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Resposta:

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 2 \\ 5f(n-1) - 7f(n-2) + 3f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

$f(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é

$$X^3 - 5X^2 - 7X + 3,$$

cujas raízes são 1 e 3, com multiplicidades 2 e 1, respectivamente. Uma base para $\mathcal{R}(5, -7, 3)$ é

$$\left\{n^0 1^n, n^1 1^n, 3^n\right\}$$

e temos

$$f(n) = c_{1,0} n^0 1^n + c_{1,1} n^1 1^n + c_{2,0} n^0 3^n = c_{1,0} + c_{1,1} n + c_{2,0} 3^n,$$

onde $c_{1,0}$, $c_{1,1}$ e $c_{2,0}$ são a solução de

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{1,0} + c_{1,1} n + c_{2,0} 3^0, \\ f(1) &= c_{1,0} + c_{1,1} n + c_{2,0} 3^1, \\ f(2) &= c_{1,0} + c_{1,1} n + c_{2,0} 3^2, \end{aligned}$$

isto é

$$\begin{aligned}
0 &= c_{1,0} + c_{1,1}n + c_{2,0}, \\
1 &= c_{1,0} + c_{1,1}n + 3c_{2,0}, \\
2 &= c_{1,0} + c_{1,1}n + 9c_{2,0},
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
c_{1,0} &= 0, \\
c_{1,1} &= 1, \\
c_{2,0} &= 0,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$f(n) = c_{1,0} + c_{1,1}n + c_{2,0}3^n = 0 + 1n + 03^n = n.$$

Unidade 30

Recorrências Lineares Homogêneas (4)

Exercícios 119b a 119b

Exercício 119b

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 9, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 9f(n-1) - 27f(n-2) + 27f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Resposta:

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 9, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 9f(n-1) - 27f(n-2) + 27f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

$f(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27,$$

cuja raíz é 3, com multiplicidade 3.
Uma base para $\mathcal{R}(9, -27, 27)$ é

$$\{n^0 3^n, n^1 3^n, n^2 3^n\}$$

e temos

$$f(n) = c_{1,0}n^0 3^n + c_{1,1}n^1 3^n + c_{1,2}n^2 3^n = c_{1,0}3^n + c_{1,1}n3^n + c_{2,0}n^2 3^n,$$

onde $c_{1,0}$, $c_{1,1}$ e $c_{1,2}$ são a solução de

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{1,0}3^0 + c_{1,1}03^0 + c_{1,2}0^2 3^0, \\ f(1) &= c_{1,0}3^1 + c_{1,1}13^1 + c_{1,2}1^2 3^1, \\ f(2) &= c_{1,0}3^2 + c_{1,1}23^2 + c_{1,2}2^2 3^2, \end{aligned}$$

isto é

$$\begin{aligned} 1 &= c_{1,0} + 0c_{1,1} + 0c_{1,2}, \\ 9 &= 3c_{1,0} + 3c_{1,1} + 3c_{1,2}, \\ 9 &= 9c_{1,0} + 18c_{1,1} + 9c_{1,2}, \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} c_{1,0} &= 1, \\ c_{1,1} &= 4, \\ c_{2,0} &= -2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$f(n) = c_{1,0}3^n + c_{1,1}n3^n + c_{2,0}n^2 3^n = 3^n + 4n3^n - 2n^2 3^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Unidade 31

Recorrências Lineares Homogêneas (5)

Exercícios 119c a 119c

Exercício 119c

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1 \\ 3, & \text{se } n = 2 \\ 7f(n-1) - 16f(n-2) + 12f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Resposta:

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1 \\ 3, & \text{se } n = 2 \\ 7f(n-1) - 16f(n-2) + 12f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

$f(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12,$$

cujas raízes são 2 e 3, com multiplicidades 2 e 1.

Uma base para $\mathcal{R}(7, -16, 12)$ é

$$\{n^0 2^n, n^1 2^n, n^0 3^n\}$$

e temos

$$f(n) = c_{1,0}n^0 2^n + c_{1,1}n^1 2^n + c_{2,0}n^0 3^n = c_{1,0}2^n + c_{1,1}n2^n + c_{2,0}3^n,$$

onde $c_{1,0}$, $c_{1,1}$ e $c_{2,0}$ são a solução de

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{1,0}2^0 + c_{1,1}02^0 + c_{1,2}3^0, \\ f(1) &= c_{1,0}2^1 + c_{1,1}12^1 + c_{1,2}3^1, \\ f(2) &= c_{1,0}2^2 + c_{1,1}22^2 + c_{1,2}3^2, \end{aligned}$$

isto é

$$\begin{aligned} 0 &= 1c_{1,0} + 0c_{1,1} + 1c_{2,0}, \\ 1 &= 2c_{1,0} + 2c_{1,1} + 3c_{2,0}, \\ 3 &= 4c_{1,0} + 8c_{1,1} + 9c_{2,0}, \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} c_{1,0} &= 1, \\ c_{1,1} &= 1, \\ c_{2,0} &= -1, \end{aligned}$$

ou seja,

$$f(n) = c_{1,0}2^n + c_{1,1}n2^n + c_{2,0}3^n = 2^n + n2^n - 3^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Unidade 32

Recorrências Lineares não Homogêneas (1)

Exercícios 123 a 126

Definição. *Uma* Recorrência Linear não Homogênea *(RLnH) é uma recorrência da forma*

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k) + g(n), \text{ para todo } n \geq k$$

onde $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$ *e* $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$*.*

Teorema 37. *Sejam* $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *tais que*

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k) + g(n), \text{ para todo } n \geq k,$$

Se g *satisfaz uma recorrência linear homogênea cujo polinômio característico é* G*, então* f *satisfaz uma recorrência linear homogênea cujo polinômio característico é*

$$G(X^k - a_1 X^{k-1} - \ldots - a_{k-2}X^2 - a_{k-1}X - a_k).$$

Corolário 38. *Dados* $k \in \mathbb{N}$ *e* $c, r \in \mathbb{C}$*, a função*

$$g(n) = cn^k r^n,$$

satisfaz uma RLH cujo polinômio característico é

$$(X - r)^{k+1}.$$

Demonstração. Imediato a partir do T. 32. $\square$

Corolário 39. *Se $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazem recorrências lineares homogêneas cujos polinômios característicos são, respectivamente, F e G, então $f + g$ satisfaz uma recorrência linear homogênea cujo polinômio característico é FG.*

Demonstração. Sejam $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo recorrências lineares homogêneas cujos polinômios característicos são, respectivamente, F e G, de maneira que

$$f(n) = a_1 f(n-1) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k.$$

Então, para todo $n \geq k$,

$$(f+g)(n) = f(n) + g(n) = a_1 f(n-1) + \ldots + a_k f(n-k) + g(n),$$

e, portanto (T. 37), $(f+g)(n)$ satisfaz uma RLnH cujo PC é

$$G(X^k - a_1 X^{k-1} - \ldots - a_k) = GF = FG.$$

$\square$

Unidade 33

Recorrências Lineares não Homogêneas (2)

Exercício 123b

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ 2f(n-1) + 1, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Resposta:

$f(n)$ satisfaz uma RLnH cujo PC é

$$(X - 2)G,$$

onde G é o PC de uma RLH satisfeita por

$$g(n) = 1.$$

Como g satisfaz a recorrência

$$g(n) = g(n-1),$$

então g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G = (X - 1),$$

e daí, f satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X - 1)(X - 2)$$

e então
$$f(n) = c_{10}1^n + c_{20}2^n = c_{10} + c_{20}2^n$$
onde c_{10}, e c_{20} são dados por
$$\begin{aligned} f(0) &= c_{10} + c_{20}2^0, \\ f(1) &= c_{10} + c_{20}2^1, \end{aligned}$$
ou seja,
$$\begin{aligned} 0 &= c_{10} + c_{20}, \\ 2f(0) + 1 &= c_{10} + 2c_{20}, \end{aligned}$$
ou seja,
$$\begin{aligned} c_{10} &= -c_{20}, \\ 1 &= -c_{20} + 2c_{20} = c_{20}, \end{aligned}$$
e portanto,
$$c_{10} = -1,$$
e portanto,
$$f(n) = c_{10} + c_{20}2^n = -1 + 1 \times 2^n = 2^n - 1,$$
para todo $n > 0$.

Como ainda
$$2^0 - 1 = 0 = f(0),$$
então
$$f(n) = 2^n - 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Unidade 34

Recorrências Lineares não Homogêneas (3)

Exercício 123c

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f(n-1) + n, & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Resposta:

$f(n)$ satisfaz uma RLnH cujo PC é

$$(X-1)G,$$

onde G é o PC de uma RLH satisfeita por

$$g(n) = n.$$

Como

$$n = 1n^1 1^n,$$

então g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G = (X-1)^2,$$

e f satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X-1)(X-1)^2 = (X-1)^3,$$

e

$$f(n) = c_{10}1^n + c_{11}n^1 1^n + c_{12}n^2 1^n = c_{10} + c_{11}n + c_{12}n^2,$$

onde c_{10}, c_{11} e c_{12} são dados por

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{10} + c_{11}0 + c_{12}0^2, \\ f(1) &= c_{10} + c_{11}1 + c_{12}1^2, \\ f(2) &= c_{10} + c_{11}2 + c_{12}2^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= c_{10}, \\ f(0) + 1 &= c_{10} + c_{11} + c_{12}, \\ f(1) + 2 &= c_{10} + 2c_{11} + 4c_{12}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= c_{10}, \\ 1 &= c_{11} + c_{12}, \\ 3 &= 2c_{11} + 4c_{12}, \end{aligned}$$

e portanto,

$$c_{12} = 1 - c_{11},$$

e

$$2c_{11} + 4(1 - c_{11}) = 3,$$

ou seja

$$-2c_{11} = -1,$$

e portanto,

$$c_{11} = \frac{1}{2},$$

e

$$c_{12} = 1 - c_{11} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

e portanto,

$$f(n) = c_{10} + c_{11}n + c_{12}n^2 = 0 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 = \frac{n(n+1)}{2},$$

para todo $n > 0$.

Como ainda

$$\frac{0(0+1)}{2} = 0 = f(0),$$

então

$$f(n) = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Unidade 35

Recorrências Lineares não Homogêneas (4)

Exercício 123k

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ f(n-1) + f(n-2) + 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Resposta:

Usando a notação do Teorema 37 temos

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= 1, \\ g(n) &= 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Como

$$g(n) = 1n^0 1^n,$$

então g satisfaz uma RLH cujo polinômio característico é

$$G = (X-1)^{0+1} = X - 1$$

Pelo Teorema 37 temos que f pertence ao espaço vetorial cujo polinômio característico é

$$G(X^2 - X - 1) = (X-1)(X^2 - X - 1),$$

e cujas raízes são

$$\begin{aligned}
r_1 &= 1, \\
r_2 &= \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \\
r_3 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}.
\end{aligned}$$

Pelo Corolário 36, temos

$$\begin{aligned}
f(n) &= c_{1,0}r_1^n + c_{2,0}r_2^n + c_{3,0}r_3^n \\
&= c_{1,0}1^n + c_{2,0}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_{3,0}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \\
&= c_{1,0} + c_{2,0}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_{3,0}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

onde $\{c_{1,0}, c_{2,0}, c_{3,0}\}$ é a solução do sistema

$$\begin{aligned}
f(0) &= c_{1,0} + c_{2,0}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 + c_{3,0}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0, \\
f(1) &= c_{1,0} + c_{2,0}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 + c_{3,0}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1, \\
f(2) &= c_{1,0} + c_{2,0}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_{3,0}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2,
\end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned}
0 &= c_{1,0} + c_{2,0} + c_{3,0}, \\
1 &= c_{1,0} + c_{2,0}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + c_{3,0}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \\
f(0) + f(1) + 1 &= c_{1,0} + c_{2,0}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_{3,0}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
0 &= c_{1,0} + c_{2,0} + c_{3,0}, \\
1 &= c_{1,0} + c_{2,0}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + c_{3,0}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \\
2 &= c_{1,0} + c_{2,0}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_{3,0}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2,
\end{aligned}$$

cuja solução é

$$\begin{aligned}
c_{1,0} &= -1, \\
c_{2,0} &= \frac{5-3\sqrt{5}}{10}, \\
c_{3,0} &= \frac{5+3\sqrt{5}}{10},
\end{aligned}$$

e portanto,

$$f(n) = \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1.$$

Unidade 36

Recorrências Lineares não Homogêneas (5)

Exercício 123d

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 1, \\ 2f(n-1) + n, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

Resposta:

Usando a notação do Teorema 37 temos

$$\begin{aligned} a_1 &= 2, \\ g(n) &= n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Como

$$g(n) = 1n^1 1^n,$$

temos diretamente do Corolário 38 que g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G = (X-1)^{1+1} = (X-1)^2,$$

e daí, pelo Teorema 37 temos que f pertence ao espaço vetorial cujo polinômio característico é

$$G(X-2) = (X-1)^2(X-2),$$

e daí, pelo Corolário 36, temos

$$f(n) = c_{1,0}1^n + c_{1,1}n1^n + c_{2,0}2^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$f(n) = c_{1,0} + c_{1,1}n + c_{2,0}2^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde $\{c_{1,0}, c_{1,1}, c_{2,0}\}$ é a solução do sistema

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{1,0} + 0c_{1,1} + c_{2,0}2^0, \\ f(1) &= c_{1,0} + 1c_{1,1} + c_{2,0}2^1, \\ f(2) &= c_{1,0} + 2c_{1,1} + c_{2,0}2^2, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{1,0} + c_{2,0}, \\ 2f(0) + 1 &= c_{1,0} + c_{1,1} + 2c_{2,0}, \\ 2f(1) + 2 &= c_{1,0} + 2c_{1,1} + 4c_{2,0}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= c_{1,0} + c_{2,0}, \\ 1 &= c_{1,0} + c_{1,1} + 2c_{2,0}, \\ 4 &= c_{1,0} + 2c_{1,1} + 4c_{2,0}, \end{aligned}$$

cuja solução é

$$\begin{aligned} c_{1,0} &= -2, \\ c_{1,1} &= -1, \\ c_{2,0} &= 2, \end{aligned}$$

e portanto,

$$f(n) = c_{1,0} + c_{1,1}n + c_{2,0}2^n = 22^n - n - 2, = 2^{n+1} - n - 2, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Unidade 37

Somatórios (1)

Exercícios 129 a 133

Corolário 40. *Se $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfaz uma recorrência linear cujo polinômio característico é F, então a função $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ dada por*

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i)$$

satisfaz uma RLH cujo polinômio característico é $(X-1)F$.

Demonstração. Seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tal que f satisfaz uma recorrência linear cujo polinômio característico é F e seja $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ dada por

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i).$$

A função s satisfaz a recorrência

$$s(n) = s(n-1) + f(n),$$

e daí (T. 37) s satisfaz uma recorrência linear homogênea cujo polinômio característico é $(X-1)F$. $\square$

Unidade 38

Somatórios (2)

Exercício 129 Dê uma expressão livre de somatórios para $\sum_{i=0}^{n} i$.
Resposta:

Como

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} i = \sum_{i=0}^{n} g(i),$$

onde

$$g(n) = n,$$

e

$$g(n) = 1n^1 1^n,$$

temos do Corolário 38 que a função g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G = (X-1)^{1+1} = (X-1)^2,$$

e daí, pelo Corolário 40 temos que a função s satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X-1)G = (X-1)(X-1)^2 = (X-1)^3.$$

Pelo Corolário 36, temos

$$s(n) = c_{1,0}1^n + c_{1,1}n^1 1^n + c_{1,2}n^2 1^n = c_{1,0} + c_{1,1}n + c_{1,2}n^2,$$

onde $(c_{1,0}, c_{1,1}, c_{1,2})$ é a solução do sistema

$$\begin{aligned}
s(0) &= c_{1,0} + c_{1,1}0^1 + c_{1,2}0^2, \\
s(1) &= c_{1,0} + c_{1,1}1^1 + c_{1,2}1^2, \\
s(2) &= c_{1,0} + c_{1,1}2^1 + c_{1,2}2^2,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
0 &= c_{1,0}, \\
1 &= c_{1,0} + c_{1,1} + c_{1,2}, \\
3 &= c_{1,0} + 2c_{1,1} + 4c_{1,2},
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
1 &= c_{1,1} + c_{1,2}, \\
3 &= 2c_{1,1} + 4c_{1,2},
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
c_{1,0} &= 0, \\
c_{1,1} &= \frac{1}{2}, \\
c_{1,2} &= \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

e portanto,

$$s(n) = c_{1,0} + c_{1,1}n + c_{1,2}n^2 = c_{1,0} + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Unidade 39

Somatórios (3)

Exercício 127 Dado $q \in \mathbb{C} - \{0\}$, uma *progressão geométrica*[1] de razão q é uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = q, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, a soma dos n termos iniciais de uma progressão geométrica é dada por

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i).$$

1. Expresse a função f acima por meio de uma recorrência linear homogênea.
2. Resolva esta recorrência, obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão geométrica.
3. Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

Resposta:

1. $f(n) = qf(n-1), \text{ para todo } n \geq 1.$
2. Usando a notação do C. 36 temos que $f(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é $X - q$ e daí,

$$f(n) = c_{1,0}q^n,$$

[1] cfr. Exercício 109

onde $c_{1,0}$ é dado por

$$f(0) = c_{1,0}q^0,$$

isto é

$$c_{1,0} = f(0),$$

e, portanto,

$$f(n) = f(0)q^n$$

3. Como

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)$$

e $f(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é $(X-q)$, então (C. 40), a função $s(n)$ satisfaz uma recorrência linear homogênea cujo polinômio característico é $(X-1)(X-q)$. e daí (C. 36),

$$s(n) = c_{1,0}1^n + c_{2,0}q^n = c_{1,0} + c_{2,0}q^n,$$

onde $c_{1,0}$, $c_{2,0}$ são dados por

$$\begin{aligned} s(0) &= c_{1,0} + c_{2,0}q^0 = c_{1,0} + c_{2,0}, \\ s(1) &= c_{1,0} + c_{2,0}q^1 = c_{1,0} + c_{2,0}q, \end{aligned}$$

ou seja,

$$0 = c_{1,0} + c_{2,0},$$

e portanto,

$$c_{2,0} = -c_{1,0},$$

e

$$f(0) = c_{1,0} + c_{2,0}q = c_{1,0} - c_{1,0}q,$$

e portanto,

$$c_{1,0} = f(0)/(1-q),$$

e

$$c_{2,0} = -c_{1,0} = -f(0)/(1-q)$$

e

$$\begin{aligned} s(n) &= c_{1,0} + c_{2,0}q^n \\ &= \frac{f(0)}{1-q} - \frac{f(0)}{1-q}q^n = \frac{f(0)}{1-q}(1-q^n) \\ &= f(0)\frac{q^n-1}{q-1}. \end{aligned}$$

Unidade 40

Somatórios (4)

Exercício 128 Uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ é uma *progressão aritmética*[1] se existe $r \in \mathbb{C}$ tal que

$$f(i+1) - f(i) = r \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, a soma dos n termos iniciais de uma progressão aritmética é dada por

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i).$$

1. Expresse a função f acima por meio de uma recorrência linear não homogênea.

2. Resolva esta recorrência, obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão aritmética.

3. Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

Resposta:

1. $f(n) = f(n-1) + r, \text{ para todo } n \geq 1.$

2. Usando a notação do Teorema 37 temos

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ g(n) &= r, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

[1]cfr. Exercício 106

Como
$$g(n) = rn^0 1^n,$$
temos diretamente do Corolário 38 que g satisfaz uma RLH cujo PC é
$$G = (X - 1),$$
e daí, pelo Teorema 37 temos que f pertence ao espaço vetorial cujo polinômio característico é
$$G(X - 1) = (X - 1)^2,$$
e daí, pelo Corolário 36, temos
$$f(n) = c_{1,0}n^0 1^n + c_{1,1}n^1 1^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$
ou seja,
$$f(n) = c_{1,0} + c_{1,1}n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$
onde $\{c_{1,0}, c_{1,1}\}$ é a solução do sistema
$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & c_{1,0} + 0c_{1,1}, \\ f(1) & = & c_{1,0} + 1c_{1,1}, \end{array}$$
isto é,
$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & c_{1,0}, \\ f(0) + r & = & c_{1,0} + c_{1,1}, \end{array}$$
ou seja,
$$c_{1,1} = f(0) + r - c_{1,0} = f(0) + r - f(0) = r,$$
e portanto,
$$f(n) = c_{1,0} + c_{1,1}n = f(0) + rn, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

3. Como
$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)$$
e $f(n)$ satisfaz uma RLnH cujo PC é $(X - 1)^2$, então (C. 40), a função $s(n)$ satisfaz uma recorrência linear homogênea cujo polinômio característico é
$$(X - 1)(X - 1)^2 = (X - 1)^3.$$

e daí (C. 36),

$$s(n) = c_{10}1^n + c_{11}n^1 1^n + c_{12}n^2 1^n = c_{10} + c_{11}n + c_{12}n^2,$$

onde c_{10}, c_{11} e c_{12} são dados por

$$\begin{array}{rcl} s(0) & = & c_{10} + c_{11}0 + c_{12}0^2, \\ s(1) & = & c_{10} + c_{11}1 + c_{12}1^2, \\ s(2) & = & c_{10} + c_{11}2 + c_{12}2^2, \end{array}$$

ou seja,

$$0 = c_{10},$$

e

$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & c_{11} + c_{12}, \\ f(0) + f(0) + r & = & 2c_{11} + 4c_{12}, \end{array}$$

ou seja,

$$c_{1,2} = f(0) - c_{1,1}$$

e

$$2f(0) + r = 2c_{1,1} + 4(f(0) - c_{1,1}) = -2c_{1,1} + 4f(0),$$

ou seja,

$$c_{1,1} = (2f(0) - r)/2$$

e

$$c_{1,2} = f(0) - c_{1,1} = f(0) - (2f(0) - r)/2 = r/2$$

e

$$s(n) = c_{10} + c_{11}n + c_{12}n^2 = 0 + \frac{2(f(0) - r)n}{2} + \frac{rn^2}{2} = f(0)n + \frac{r(n^2 - n)}{2}$$
$$= f(0)n + \frac{n(n-1)}{2}r.$$

Portanto,

$$s(n) = f(0)n + \frac{n(n-1)}{2}r, \text{ para todo } n > 0.$$

Unidade 41

Somatórios (5)

O Exercício 28 sugere usar o fato de que

$$\sum_{j=0}^{n} i2^i = (n-1)2^{n+1} + 2,$$

para provar que

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor = n \lfloor \lg n \rfloor - \left(2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} - \lfloor \lg n \rfloor - 2\right).$$

Exercício 130 Dê uma expressão[1] livre de somatórios para $\sum_{i=0}^{n} i2^i$.

Resposta:

Fazendo

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} g(i),$$

onde

$$g(n) = n2^n,$$

temos

$$g(n) = 1n^1 2^n,$$

e daí, do Corolário 38 temos que a função g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G = (X-2)^{1+1} = (X-2)^2,$$

e daí, pelo Corolário 40 temos que a função s satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X-1)G = (X-1)(X-2)^2.$$

[1] cfr. Exercício 47

Pelo Corolário 36, temos

$$s(n) = c_{1,0}n^0 1^n + c_{2,0}n^0 2^n + c_{2,1}n^1 2^n = c_{1,0} + c_{2,0}2^n + c_{2,1}n2^n$$

onde $(c_{1,0}, c_{2,0}, c_{2,1})$ é a solução do sistema

$$\begin{array}{rcl} s(0) & = & c_{1,0} + c_{2,0}2^0 + c_{2,1}02^0, \\ s(1) & = & c_{1,0} + c_{2,0}2^1 + c_{2,1}12^1, \\ s(2) & = & c_{1,0} + c_{2,0}2^2 + c_{2,1}22^2, \end{array}$$

isto é,

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & c_{1,0} + c_{2,0}(1) + c_{2,1}(0)1, \\ 0 + 12^1 & = & c_{1,0} + c_{2,0}(2) + c_{2,1}(1)2, \\ 0 + 12^1 + 22^2 & = & c_{1,0} + c_{2,0}(4) + c_{2,1}2(4), \end{array}$$

ou seja,

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & c_{1,0} + c_{2,0}, \\ 2 & = & c_{1,0} + 2c_{2,0} + 2c_{2,1}, \\ 10 & = & c_{1,0} + 4c_{2,0} + 8c_{2,1}, \end{array}$$

cuja solução é

$$\begin{array}{rcl} c_{1,0} & = & 2, \\ c_{2,0} & = & -2, \\ c_{2,1} & = & 2. \end{array}$$

e portanto,

$$s(n) = c_{1,0} + c_{2,0}2^n + c_{2,1}n2^n = 2 - 2 \times 2^n + 2n2^n = 2^{n+1}(n-1) + 2.$$

Parte III

Contagem

Unidade 42

Fundamentos de Contagem (1)

42.1 Preliminares

$$[a..b] := \{z \in \mathbb{Z} \mid a \leq z \leq b\}.$$

$$[n] := [1..n].$$

Observe que

$$[0] = [1..0] = \{z \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq z \leq 0\} = \emptyset.$$

Uma *partição* de um conjunto A é um conjunto $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \ldots\}$ de subconjuntos de A, dois a dois disjuntos entre si, tais que

$$\bigcup_{A_i \in \mathcal{P}} A_i = A.$$

Cada conjunto de $\mathcal{P}$ é chamado de uma *parte* da partição $\mathcal{P}$.

Se $\mathcal{P}$ é finito e tem k elementos, dizemos também que $\mathcal{P}$ é uma k–*partição* de A.

Unidade 43

Fundamentos de Contagem (2)

43.1 Contagem

Contagem significa contagem do número de elementos de um conjunto.

Os conjuntos que sabemos contar são os conjuntos $[n]\colon n \in \mathbb{N}$. A maneira de comparar a quantidade de elementos entre conjuntos é o estabelecimento de bijeções.

Seja $f\colon A \to B$ uma função.

A *imagem* de um elemento $a \in A$ pela função f é o elemento $f(a) \in B$.

A imagem da função f é o conjunto

$$f(A) := \{f(a) \mid a \in A\}.$$

Para cada $b \in B$ definimos a *imagem inversa de b por f* como sendo o conjunto dos elementos de a cuja imagem é b, isto é

$$f^{-1}(b) := \{a \in A \mid f(a) = b\}.$$

O conjunto das imagens inversas de A por f é uma partição de A que é denotada A/f e é chamada de *quociente* de A por f, isto é

$$A/f := \left\{f^{-1}(b) \mid b \in f(A)\right\}.$$

Observe que, como A/f é uma partição de A, então

$$A = \bigcup_{C \in A/f} C,$$

ou, equivalentemente,

$$A = \bigcup_{b \in B} f^{-1}(b).$$

Exemplo. $f\colon [3] \times [4] \to [4]$ *dada por* $f(a,b) = b$.

Unidade 44

Fundamentos de Contagem (3)

A função f é

injetora se $f(a) = f(b) \implies a = b, \text{ para todo } a, b \in A.$

sobrejetora se $f(A) = B$.

bijetora se é injetora e sobrejetora.

Uma *injeção* (*sobrejeção*, *bijeção*) é uma função *injetora* (*sobrejetora*, *bijetora*).

Unidade 45

Fundamentos de Contagem (4)

$A \sim B$ denota o fato de que existe bijeção entre A e B.

Para cada conjunto finito A existe um único inteiro $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \sim [n]$. Tal inteiro é chamado *tamanho* (ou *cardinalidade* ou *número de elementos*) do conjunto A e é denotado por $|A|$.

Definição. *Uma* enumeração *de um conjunto finito A é uma bijeção $f\colon [|A|] \to A$.*

Para cada $i \in [|A|]$,

- *i é chamado de* índice *de $f(i)$ em A segundo f, e*
- *$f(i)$ é o i-ésimo elemento de A segundo f.*

Exemplo. *Quais são os divisores naturais de 72?*

Fazendo

$$D = \{n \in \mathbb{N} \mid n|72\}$$

temos

$$D = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\},$$

e

$$|D| = 12.$$

São enumerações do conjunto D dos divisores naturais de 72:

$f(i)$	1	2	3	4	6	8	9	12	18	24	36	72
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

$g(i)$	1	3	9	2	6	18	4	12	36	8	24	72
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Teorema 41. *A composição de bijeções é uma bijeção.*

Demonstração. Exercício 140 $\square$

Corolário 42. *Dados conjuntos finitos A e B, temos que $|A| = |B|$ se e somente se $A \sim B$.*

Demonstração. Exercício 141 $\square$

Exercícios 139, 140, 141, 142.

Unidade 46

União

Teorema 43. *Se A e B são conjuntos finitos e disjuntos, então*

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Demonstração. Sejam A e B conjuntos disjuntos.

Vamos provar que $|A \cup B| = |A| + |B|$ provando que $A \cup B \sim [|A| + |B|]$.

Sejam f e g enumerações de A e B, respectivamente, e seja $h\colon [|A|+|B|] \to A \cup B$ dada por

$$h(k) = \begin{cases} f(k), & \textsf{se } k \leq |A|, \\ g(k - |A|) & \textsf{se } k > |A|. \end{cases}$$

Para provar que $A \cup B \sim [|A|+|B|]$, basta provar que h é uma bijeção. □

Como a união de conjuntos é uma operação associativa, denotamos

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i := A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

Para $n = 0$, convencionamos

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \emptyset.$$

Corolário 44 (Princípio Aditivo)**.** *Se $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos dois a dois disjuntos entre si, então,*

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

Demonstração. Exercício 58 $\square$

Corolário 45 (Limitante da União)**.** *Se $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos, então,*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

Corolário 46. *Se A é um conjunto finito e $f\colon A \to B$ é uma função, então*

$$|A| = \sum_{b \in f(A)} |f^{-1}(b)|$$

Demonstração. Seja A um conjunto finito e seja $f\colon A \to B$ uma função. Como

$$A = \bigcup_{b \in f(A)} f^{-1}(b),$$

então (C.42)

$$|A| = \left|\bigcup_{b \in f(A)} f^{-1}(b)\right|$$

e como os conjuntos $f^{-1}(b) \mid b \in B$ são dois a dois disjuntos entre si, então (Corolário 44)

$$|A| = \sum_{b \in f(A)} |f^{-1}(b)|.$$

$\square$

Corolário 47. *Se A é um conjunto finito e $B \subseteq A$, então*

$$|A - B| = |A| - |B|.$$

Demonstração. Seja A um conjunto finito e seja $B \subseteq A$. Vamos provar que $|A - B| = |A| - |B|$.

Observe que, como $B \subseteq A$, então (Ex. 11)

$$A = (A - B) \cup B,$$

de forma que

$$|A| = |(A - B) \cup B|,$$

e como $A - B$ e B são disjuntos, então (Teorema 43)

$$|(A - B) \cup B| = |A - B| + |B|,$$

e portanto,
$$|A| = |A - B| + |B|,$$
ou seja
$$|A - B| = |A| - |B|.$$
$\square$

Corolário 48. *Se A e B são conjuntos finitos, então*
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Demonstração. Sejam A e B conjuntos finitos. Vamos provar que $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Observe que
$$A \cup B = A \cup (B - A \cap B),$$
e como A e $B - A \cap B$ são disjuntos, então (Teorema 43)
$$|A \cup B| = |A| + |B - (A \cap B)|.$$

Como $A \cap B \subseteq B$, temos (Corolário 47) que
$$|B - (A \cap B)| = |B| - |A \cap B|,$$
e consequentemente
$$|A \cup B| = |A| + |B - A \cap B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$
$\square$

Unidade 47

Produtos Cartesianos (1)

Teorema 49. *Se A é um conjunto finito e U é um conjunto com um único elemento, então,*
$$|U \times A| = |A|.$$

Demonstração. Seja A um conjunto finito e seja $U = \{u\}$ um conjunto com um único elemento.

Para provar que
$$|U \times A| = |A|,$$
basta provar que a função $(u, a) \mapsto a$ é uma bijeção $U \times A \to A$. $\square$

Teorema 50. *Se A e B são conjuntos finitos, então*
$$|A \times B| = |A||B|.$$

Demonstração. Sejam A e B conjuntos finitos. Vamos provar que
$$|A \times B| = |A||B|.$$

Seja $f\colon A \times B \to A$ a função dada por
$$f(a, b) = a.$$

Pelo Corolário 46 temos
$$A \times B = \bigcup_{a \in f(A \times B)} f^{-1}(a) = \bigcup_{a \in A} f^{-1}(a),$$
e para cada $a \in A$,
$$f^{-1}(a) = \{(a, b) \in A \times B \mid b \in B\} = \{a\} \times B \overset{\mathrm{T}49}{\sim} B,$$

e portanto,

$$|f^{-1}(a)| \overset{\text{C. } 42}{=} |B|,$$

e consequentemente,

$$|A \times B| = \left| \bigcup_{a \in A} f^{-1}(a) \right| \overset{\text{C.} 44}{=} \sum_{a \in A} |f^{-1}(a)| = \sum_{a \in A} |B| \overset{\text{T. } 4}{=} |A||B|.$$

$\square$

Unidade 48

Produtos Cartesianos (2)

Exercício 144 Quantos divisores naturais tem o número 72?

Resposta:

Seja D o conjunto dos divisores naturais de 72. Queremos determinar $|D|$.

Os divisores primos de 72 são 2 e 3, pois

$$72 = 2^3 \times 3^2.$$

Cada divisor de 72 corresponde a um par de expoentes (a, b) onde

$$\begin{aligned} 0 \leq a \leq 3, \ \mathtt{e} \\ 0 \leq b \leq 2, \end{aligned}$$

isto é

$$\begin{aligned} a \in [0..3], \ \mathtt{e} \\ b \in [0..2], \end{aligned}$$

ou seja,

$$(a, b) \in [0..3] \times [0..2].$$

Noutras palavras, a função $(a, b) \mapsto 2^a\, 3^b$ é uma bijeção $[0..3] \times [0..2] \to D$ e consequentemente (C. 42),

$$|D| = |[0..3] \times [0..2]| = |[0..3]|\, |[0..2]| = 4 \times 3 = 12.$$

Unidade 49

Produtos Cartesianos (3)

Definição. *Se* $n > 0$ *é um inteiro e* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *são conjuntos, o* produto cartesiano *de* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *é o conjunto das* n*-uplas ordenadas de elementos de* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *respectivamente, ou seja,*

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i, \text{ para todo } 1 \leq i \leq n\}.$$

Denota-se

$$\prod_{i=1}^{n} A_i := A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n,$$

e convenciona-se que

$$\prod_{i=1}^{0} A_i := \{()\}.$$

Corolário 51 (Princípio Multiplicativo)**.** *Se* $A_i\colon 1 \leq i \leq n$ *são conjuntos finitos, então*

$$\left|\prod_{i=1}^{n} A_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|.$$

Demonstração. Exercício 143. □

Exercício 145 Quantos divisores naturais tem o número 360?
Resposta:

Seguindo o mesmo raciocínio do Exercício 144, temos

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1,$$

e daí, fazendo

$$D := \text{conjunto dos divisores naturais de } 360,$$

temos

$$D \sim [0..3] \times [0..2] \times [0..1],$$

e consequentemente (C. 42),

$$|D| = |[0..3] \times [0..2] \times [0..1]| \overset{\text{C. } 51}{=} |[0..3]| \times |[0..2]| \times |[0..1]| = 4 \times 3 \times 2 = 24.$$

Teorema 52. *O número de divisores naturais de um inteiro $n \in \mathbb{N}$ é*

$$\prod_{i=1}^{k}(m_i + 1),$$

onde

$$\prod_{i=1}^{k} p_i^{m_i},$$

é a decomposição de n em fatores primos.

Demonstração. Exercício 146 $\square$

Exercícios 147, 148, 149.

Unidade 50

Sequências (1)

Definição. *Dados um conjunto A e um inteiro $n > 0$, o* conjunto das sequências *de tamanho n sobre A é o conjunto*

$$A^n := \underbrace{A \times \ldots \times A}_{n vezes} = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1, \ldots, a_n \in A\}$$

A^0 denota o conjunto com a sequência de tamanho zero, isto é,

$$A^0 = \{()\}$$

Corolário 53. *Se $A \neq \emptyset$ é finito, então*

$$|A^n| = |A|^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto finito não vazio, e seja $n \in \mathbb{N}$. Vamos provar que

$$|A^n| = |A|^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Se $n = 0$ temos que

$$|A^n| = |A^0| = |\{()\}| = 1 = |A|^0.$$

Se $n > 0$, temos que

$$|A^n| \overset{\text{C. 51}}{=} \prod_{i=1}^{n} |A| \overset{\text{Ex.60}}{=} |A|^n.$$

$\square$

Sequências de tamanho n sobre um conjunto A são também conhecidas pelos nomes de

- *arranjos de n elementos de A tomados com repetição*, ou
- *palavras de tamanho n sobre o alfabeto A*, ou ainda
- *amostras ordenadas com reposição de tamanho n do conjunto A.*

Unidade 51

Sequências (2)

Exercício 150 Um "bit" é um elemento de $\{0,1\}$.

Se um "byte" é uma sequência de 8 "bits", quantos valores diferentes pode assumir um "byte"?

Resposta: Fazendo

$$B := \text{conjunto dos bytes.}$$

Como cada "byte" é uma sequência de 8 "bits", isto é, um elemento de de $\{0,1\}^8$, então

$$B \sim \{0,1\}^8$$

e consequentemente (C. 42),

$$|B| = |\{0,1\}^8| \overset{\text{C. } 53}{=} |\{0,1\}|^8 = 2^8 = 256.$$

Unidade 52

Sequências (3)

Exercício 151 Um teclado convencional tem 47 "teclas que geram caracteres". Cada tecla pode gerar dois caracteres, conforme combinada ou não com a tecla "shift". Chamaremos de *caracteres convencionais* os caracteres que podem ser gerados desta maneira.

Uma *senha convencional* é uma sequência de caracteres convencionais.

Considere um sistema de quebra de senhas à base de "força bruta", isto é, que tenta todas as senhas possíveis, e suponha que o sistema é capaz de testar 1 (uma) senha por segundo.

1. Qual o menor tamanho n que deve ter uma senha convencional para garantir que tal sistema não seja capaz de testar todas as senhas possíveis em um dia?

2. Se o sistema atacante for um milhão de vezes mais rápido, para quanto mudará este valor?

Resposta:

Fazendo

$$\begin{aligned} T &:= \text{conjunto das teclas convencionais,} \\ C &:= \text{conjunto dos caracteres convencionais,} \\ S_n &:= \text{senhas convencionais de tamanho } n, \end{aligned}$$

temos

$$S_n = C^n.$$

1. Um dia tem 24.60.60 = 86 400 segundos e queremos

$$|S_n| > 86400.$$

Como

$$S_n = C^n,$$

então

$$|S_n| = |C^n| \overset{\text{C. 53}}{=} |C|^n$$

Como

$$C \sim \{0,1\} \times T,$$

então (C. 42),

$$|C| = |\{0,1\} \times T| \overset{\text{T.50}}{=} |\{0,1\}||T| = 2.47 = 94$$

e

$$|S_n| = |C|^n = 94^n.$$

Então, para ter

$$|S_n| > 86400,$$

precisamos ter

$$94^n > 86400,$$

ou seja

$$n \lg 94 > \lg 86400,$$

ou seja

$$n > \frac{\lg 86400}{\lg 94},$$

e portanto,

$$n = \left\lceil \frac{\lg 86400}{\lg 94} \right\rceil.$$

Para estimar o valor de $\left\lceil \frac{\lg 86400}{\lg 94} \right\rceil$, observe que

$$\begin{aligned} 16 &< \lg 86400 < 17, \\ 6 &< \lg 94 < 7, \end{aligned}$$

então

$$2 < \frac{16}{7} < \frac{\lg 86400}{\lg 94} < \frac{17}{6} < 3.$$

e então

$$\left\lceil \frac{\lg 86400}{\lg 94} \right\rceil = 3.$$

2. Se o sistema atacante for um milhão (10^6) de vezes mais rápido, o número de tentativas num dia será um milhão de vezes maior, e precisamos de
$$|S_n| > 10^6 \times 86400,$$
ou seja
$$94^n > 10^6 \times 86400,$$
ou seja
$$n = \left\lceil \frac{\lg(10^6 \times 86400)}{\lg 94} \right\rceil.$$

Para estimar o valor de $\left\lceil \frac{\lg(10^6 \times 86400)}{\lg 94} \right\rceil$, observe que
$$\frac{\lg(10^6.86400)}{\lg 94} = \frac{\lg 10^6 + \lg 86400}{\lg 94} = \frac{\lg 10^6}{\lg 94} + \frac{\lg 86400}{\lg 94}$$
e
$$19 < \lg 10^6 < 20,$$
então
$$\frac{19}{7} < \frac{\lg 10^6}{\lg 94} < \frac{20}{6}$$
e
$$5 = \frac{35}{7} = \frac{19}{7} + \frac{16}{7} < \frac{\lg 10^6}{\lg 94} + \frac{\lg 86400}{\lg 94} < \frac{20}{6} + \frac{17}{6} = \frac{37}{6} < 7$$
e portanto
$$\left\lceil \frac{\lg(10^6 \times 86400)}{\lg 94} \right\rceil = 6.$$

Unidade 53

Sequências (4)

Corolário 54. *Seja A um conjunto finito e seja $n \in \mathbb{N}$. O número de sequências de tamanho no máximo n sobre A é*

$$\frac{|A|^{n+1} - 1}{|A| - 1}.$$

Demonstração. Seja A um conjunto finito e seja $n \in \mathbb{N}$. Vamos provar que o número de sequências de tamanho no máximo n sobre A é

$$\frac{|A|^{n+1} - 1}{|A| - 1}.$$

Como o conjunto das sequências de tamanho no máximo n sobre A é

$$\bigcup_{i=0}^{n} A^i,$$

então o número de sequências de tamanho no máximo n sobre A é

$$\left| \bigcup_{i=0}^{n} A^i \right|.$$

Como os conjuntos $A^i \colon 0 \leq i \leq n$ são dois a dois disjuntos entre si, temos

$$\left| \bigcup_{i=0}^{n} A^i \right| \overset{\text{C. 44}}{=} \sum_{i=0}^{n} |A^i| \overset{\text{C. 53}}{=} \sum_{i=0}^{n} |A|^i \overset{\text{Ex. 46}}{=} \frac{|A|^{n+1} - 1}{|A| - 1}.$$

$\square$

Exercício 152 Qual o maior valor de n tal que é possível gravar em um dvd (4 700 372 992 bytes) todos os possíveis arquivos de tamanho até n?

Resposta:

Fazendo

$$\begin{aligned} d &:= 4\,700\,372\,992 = 2^{17} \cdot 7 \cdot 47 \cdot 109, \\ s(n) &:= \text{soma dos tamanhos de todos os arquivos de tamanho até } n, \end{aligned}$$

temos

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} i|A(i)|,$$

onde

$$A(n) := \text{conjunto dos arquivos de tamanho } n.$$

Como

$$A(n) = B^n,$$

onde B é o conjunto dos bytes, então

$$|A(n)| = |B^n| \overset{\text{C. 53}}{=} |B|^n \overset{\text{Ex. 150}}{=} 256^n,$$

e portanto,

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} i|A(i)| = \sum_{i=0}^{n} i256^i \overset{\text{Ex. 131f}}{=} \frac{256}{255} n256^n - \frac{256}{65025} 256^n + \frac{256}{65025}.$$

Queremos determinar o maior valor de k tal que

$$s(k) \leq d,$$

ou seja,

$$n = \max\{k \in \mathbb{N} \mid s(k) \leq d\}.$$

Como

$$s(k) \leq d$$

se e somente se

$$\frac{256}{255} k256^k - \frac{256}{255^2} 256^k + \frac{256}{255^2} \leq d,$$

ou seja

$$255 \cdot 256^{k+1} k - 256^{k+1} \leq 255^2 d - 256$$

ou seja

$$255 \cdot 256^{k+1} k \left(1 - \frac{1}{255k}\right) \leq 255^2 d - 256.$$

Como $k \geq 1$, então basta

$$255 \cdot 256^{k+1} k \leq 255^2 d - 256$$

isto é

$$256^{k+1} k \leq 255d - \frac{256}{255} = 255d \left(1 - \frac{256}{255^2 d}\right)$$

ou seja

$$(k+1) \lg 256 + \lg k \leq \lg 255d + \lg \left(1 - \frac{256}{255^2 d}\right).$$

Então basta

$$8k + 8 + \lg k \leq \lg 255d - 1$$

ou seja

$$8k + \lg k \leq \lg 255d - 9 = \lg 255 + \lg d - 9.$$

Como $\lg 255 > 7$ e $\lg d > 32$, então basta

$$8k + \lg k \leq 7 + 32 - 9 = 30.$$

ou seja

$$k \leq \frac{30 - \lg k}{8} = \frac{30}{8} - \frac{\lg k}{8} < 4,$$

e portanto,

$$n = \max\left\{k \in \mathbb{N} \mid \frac{256}{255} k 256^k - \frac{256}{255^2} 256^k + \frac{256}{255^2} \leq d,\right\} \geq 3.$$

Efetivamente,

$$\begin{aligned} s(3) = 50\,462\,976 &< d, \\ s(4) = 17\,230\,332\,160 &> d. \end{aligned}$$

e, portanto,

$$n = 3,$$

ou seja, cabem num dvd todos os possíveis arquivos de tamanho até 3.

Observe que, $4 \times 256^4 = 17\,179\,869\,184 > 4\,700\,372\,992$, e

$$\left\lceil \frac{4 \times 256^4}{4\,700\,372\,992} \right\rceil = 4,$$

e, portanto, num dvd não cabem todos os arquivos de tamanho 4.

Unidade 54

Funções

Exercícios 166 a 166

Dados dois conjuntos finitos A e B, qual o número de funções $A \to B$? Noutras palavras, qual o valor de $|B^A|$ em termos de $|A|$ e $|B|$?

Teorema 55. *Se A e B são conjuntos finitos, então*

$$B^A \sim B^{|A|}.$$

Demonstração. Sejam A e B conjuntos finitos. Vamos provar que $B^A \sim B^{|A|}$ exibindo uma bijeção $F\colon B^A \to B^{|A|}$.

Seja f uma enumeração de A e seja $F\colon B^A \to B^{|A|}$ a função dada por

$$F(h) = (h(f(1)), \ldots, h(f(|A|))).$$

Basta provar que F é bijetora. $\square$

Corolário 56. *Se A e B são conjuntos finitos, então*

$$|B^A| = |B|^{|A|}.$$

Unidade 55

Exercício 167

Exercício 167 Quantos circuitos combinacionais funcionalmente distintos com e entradas e s saídas são possíveis?

Resposta:

Seja $C(e,s)$ o conjunto dos circuitos combinacionais funcionalmente distintos com e entradas e s saídas.

Cada circuito em $C(e,s)$ implementa uma função $\{0,1\}^e \to \{0,1\}^s$, isto é,

$$C(e,s) \sim \left(\{0,1\}^s\right)^{\left(\{0,1\}^e\right)},$$

e, consequentemente,

$$|C(e,s)| = \left|\left(\{0,1\}^s\right)^{\left(\{0,1\}^e\right)}\right| \overset{\text{C. }56}{=} \left|\{0,1\}^s\right|^{\left|\{0,1\}^e\right|} \overset{\text{C. }53}{=} \left(|\{0,1\}|^s\right)^{|\{0,1\}|^e} \overset{\text{T. }58}{=} (2^s)^{2^e} = 2^{s2^e}$$

Unidade 56

Exercício 168

Exercício 168 De quantas maneiras distintas podem acontecer os aniversários de um grupo de n pessoas?

Resposta:

Se P é um conjunto de n pessoas, então cada maneira distinta de acontecerem os aniversários das pessoas em P corresponde a uma função $a\colon P \to [365]$ que associa a cada pessoa $p \in P$ seu aniversário $a(p) \in [365]$.

Assim o número de maneiras distintas de acontecerem os aniversários das pessoas em P é o número de funções $P \to [365]$, que é

$$\left|[365]^P\right| \overset{\text{C. }56}{=} |[365]|^{|P|} = 365^n$$

Unidade 57

Bolas e Urnas

Um contexto tradicional para a formulação de problemas de contagem é o conhecido pelo nome de "bolas e urnas".

Diversos problemas fundamentais de contagem podem ser formulados em termos de maneiras de distribuir k bolas por n urnas de forma a satisfazer certas restrições. Cabem, neste contexto, variações nas quais as bolas e/ou as urnas sejam idênticas ou distintas.

Dizer que as bolas/urnas são distintas significa que são identificáveis. Consequentemente trocar uma bola de urna modifica a distribuição.

Para ilustrar a diferença, considere o caso $k = 3$ e $n = 2$, isto é, 3 bolas e 2 urnas.

Se tanto as bolas quanto as urnas são distintas, temos 8 distribuições possíveis.

1. todas as bolas na urna 1,
2. todas as bolas na urna 2,
3. as bolas 1 e 2 na urna 1 e a bola 3 na urna 2,
4. as bolas 1 e 3 na urna 1 e a bola 2 na urna 2,
5. as bolas 2 e 3 na urna 1 e a bola 1 na urna 2,
6. as bolas 1 e 2 na urna 2 e a bola 3 na urna 1,
7. as bolas 1 e 3 na urna 2 e a bola 2 na urna 1,
8. as bolas 2 e 3 na urna 2 e a bola 1 na urna 1.

Se por outro lado as urnas são distintas e as bolas são idênticas, temos 4 distribuições possíveis.

1. todas as bolas na urna 1,
2. todas as bolas na urna 2,
3. 2 bolas na urna 1 e 1 bola na urna 2,
4. 2 bolas na urna 2 e 1 bola na urna 1.

Se por outro lado as bolas são distintas e as urnas são idênticas, temos também 4 distribuições possíveis.

1. todas as bolas em uma urna e a outra vazia,
2. as bolas 1 e 2 em uma urna e a bola 3 na outra,
3. as bolas 1 e 3 em uma urna e a bola 2 na outra,
4. as bolas 2 e 3 em uma urna e a bola 1 na outra.

Por fim, se tanto as bolas como as urnas são idênticas, temos 2 distribuições possíveis.

1. todas as bolas em uma urna,
2. 2 bolas em uma urna e a bola restante na outra.

Corolário 57. *Existem n^k maneiras de distribuir k bolas distintas por n urnas distintas.*

Demonstração. Seja B um conjunto de k bolas distintas e seja U um conjunto de n urnas distintas.

Uma distribuição das bolas pelas urnas é uma função $B \to U$ que associa cada bola à sua urna.

Assim o número de maneiras de distribuir as bolas de B pelas urnas de U é o número de distintas funções $B \to U$ que é

$$|U^B| \overset{\text{C } 56}{=} |U|^{|B|} = n^k$$

□

Nestas últimas unidades obtivemos a mesma resposta para três diferentes problemas de contagem, a saber,

1. número de sequências de comprimento k sobre um conjunto de n elementos,
2. número de funções de um conjunto de k elementos em um conjunto de n elementos,
3. número de distribuições de k bolas distintas por n urnas distintas.

Um outro ponto de vista pode ser adotado na observação acima. Em vez de pensar em “a mesma resposta para problemas diferentes”, podemos pensar em “maneiras diferentes de formular o mesmo problema”.

Deste ponto de vista vemos que é possível formular um mesmo problema de contagem em termos de “sequências”, “funções” ou distribuições de “bolas e urnas”.

Veremos em unidades subsequentes que essa possibilidade de reformulaçaão de problemas de contagem pode ser muito útil.

Unidade 58

Subconjuntos

Exercícios 169 a 170

Denotamos por 2^A o conjunto de todos os subconjuntos do conjunto A, isto é

$$2^A = \{S \mid S \subseteq A\}.$$

A *função característica* de um subconjunto S de um conjunto A é a função $\chi_S \colon A \to \{0, 1\}$ dada por

$$\chi_S(s) = \begin{cases} 1, & \text{se } s \in S, \\ 0, & \text{se } s \notin S. \end{cases}$$

Teorema 58. *Se A é um conjunto finito, então*

$$2^A \sim \{0, 1\}^A.$$

Demonstração. Seja A um conjunto finito e seja $F \colon 2^A \to \{0, 1\}^A$ a função dada por

$$F(S) = \chi_S.$$

Para provar que $2^A \sim \{0, 1\}^A$, basta verificar que F é uma bijeção. □

Corolário 59. *Se A é um conjunto finito, então*

$$|2^A| = 2^{|A|}.$$

Unidade 59

Exercício 171

Exercício 171 Muitos problemas de importantes otimização podem ser formulados como segue.

São dados um conjunto finito A e uma função $v\colon 2^A \to \mathbb{Q}$ que associa a cada subconjunto S de A um *valor* numérico $v(S)$. O objetivo é determinar um subconjunto A de valor mínimo, isto é, um conjunto $S \subseteq A$ tal que

$$v(S) \leq v(S'), \text{ para todo } S' \subseteq A.$$

Um algoritmo de busca exaustiva (também chamado de algoritmo de força bruta) para um problema assim é um algoritmo que computa $v(S)$ para cada subconjunto $S \subseteq A$ e devolve um subconjunto de valor mínimo.

Nesse contexto, considere um algoritmo de busca exaustiva que consegue computar um novo conjunto $S \subseteq A$ e o valor de $v(S)$ por segundo.

1. Qual o maior tamanho de A para o qual o programa consegue resolver o problema em 1 dia?
2. Se em vez de 1 conjunto por segundo o algoritmo fosse capaz de analizar 1 conjunto por ciclo de máquina, num processador de $4GHz$?
3. E se, nas condi/ões do item anterior, estivéssemos dispostos a esperar um ano?

Resposta:

1. Em um dia temos 86400 segundos.

Fazendo $n := |A|$, queremos o maior valor de n tal que

$$2^n \leq 86400,$$

ou seja

$$n = \max \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq \lg 86400\} = \lfloor \lg 86400 \rfloor = 16.$$

2. Neste caso, em um dia temos

$$86400 \times 4 \times 10^9$$

ciclos, e a resposta é

$$n = \left\lfloor \lg(86400 \times 4 \times 10^9) \right\rfloor = 48 = 3 \times 16.$$

3. Neste caso teríamos

$$86400 \times 4 \times 10^9 \times 365$$

ciclos e a resposta seria

$$n = \left\lfloor \lg(86400 \times 4 \times 10^9 \times 365) \right\rfloor = 56 = 48 + 8.$$

Unidade 60

Sequências sem Repetição

Exercícios 172 a 175

Quantas são as sequências de tamanho k sobre um conjunto finito A sem elementos repetidos?

Dado um conjunto A, um elemento $a \in A$ e um inteiro k, vamos definir

$A_k :=$ conjunto das sequências sobre A de tamanho k sem elementos repetidos.

$A_{k,a} :=$ conjunto das sequências sobre A de tamanho k sem elementos repetidos que começam com a.

Vamos tomar $A = [n]$ e definir

$$f(n, k) := |[n]_k| ,$$

para simplificar a discussão. Ficará claro pelo desenvolvimento que

$$|A_k| = f(|A|, k),$$

para todo conjunto finito A.

Seja $F\colon [n]_k \to [n]$ a função que associa cada sequência de $[n]_k$ a seu primeiro elemento, isto é,

$$F(a_1, \ldots, a_k) = a_1.$$

Observe que, para cada $i \in [n]$, o conjunto $F^{-1}(i)$ é o conjunto das sequências de $[n]_k$ cujo primeiro elemento é i, isto é,

$$F^{-1}(i) = [n]_{k,i}, \text{ para todo } i \in [n].$$

Então

$$f(n,k) = |[n]_k| \overset{\text{C. 46}}{=} \sum_{i \in F([n]_k)} \left|F^{-1}(i)\right| = \sum_{i \in [n]} |[n]_{k,i}| \, .$$

Para cada $i \in [n]$, a função $G_i \colon [n]_{k,i} \to ([n] - \{i\})_{k-1}$ dada por

$$G_i(a_1 = i, a_2, \ldots, a_k) = (a_2, \ldots, a_k)$$

é uma bijeção, e portanto,

$$[n]_{k,i} \sim ([n] - \{i\})_{k-1} \, , \text{ para todo } i \in [n]$$

e consequentemente (Corolário 42)

$$|[n]_{k,i}| = |[n-1]_{k-1}| \, , \text{ para todo } i \in [n].$$

Então, para todo $n > 0$,

$$f(n,k) = \sum_{i=1}^{n} |[n]_{k,i}| = \sum_{i=1}^{n} |[n-1]_{k-1}| \overset{\text{T 4}}{=} n\,|[n-1]_{k-1}| = nf(n-1, k-1),$$

que é uma recorrência cuja solução é (T 29)

$$f(n,k) = f(n-u, k-u) \prod_{i=0}^{u-1} (n-i),$$

onde

$$u = \min \{i \in \mathbb{N} \mid k - i \leq 0\} = k,$$

e, portanto,

$$f(n,k) = f(n-u, k-u) \prod_{i=0}^{u-1} (n-i) = f(n-k, k-k) \prod_{i=0}^{k-1} (n-i) = f(n-k, 0) \prod_{i=0}^{k-1} (n-i).$$

Como

$$f(n-k, 0) = |[n-k]_0| = |\{()\}| = 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

então
$$f(n,k) = \prod_{i=0}^{k-1}(n-i) = \prod_{i=n-k+1}^{n} i = n_k,$$
onde
$$n_k := \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0, \\ \prod_{i=n-k+1}^{n} i, & \text{se } k \leq n, \\ 0, & \text{se } k > n. \end{cases}$$

Observe que, se $k \leq n$, então
$$n_k = \frac{n!}{(n-k)!},$$
e que se $k = n$, então
$$n_k = n_n = n!.$$

Teorema 60. *O número de sequências sem elementos repetidos de tamanho k sobre um conjunto de n elementos é n_k.*

Corolário 61. *Se A é um conjunto finito, então o número de sequências sem elementos repetidos de tamanho k sobre um conjunto finito A é $|A|_k$, isto é,*
$$|A_k| = |A|_k.$$

Sequências de k elementos de um conjunto B são também conhecidas pelos nomes de

- *arranjos (sem repetição) de k elementos de A*, ou
- *amostras ordenadas sem reposição de tamanho k do conjunto A.*

60.1 Funções Injetoras, Bolas e Urnas

Na correspondência natural entre sequências de $B^{|A|}$ e funções $A \to B$, sequências de $B^{|A|}$ sem repetições correspondem a funções injetoras $A \to B$.

Notação. *Se A e B são conjuntos, B_A denota o conjunto das funções injetoras $A \to B$.*

Corolário 62. *Se A e B são conjuntos finitos, o número de funções injetoras $A \to B$ é $|B|_{|A|}$, isto é,*

$$|B_A| = |B|_{|A|}.$$

Demonstração. Sejam A e B conjuntos finitos. Vamos provar que

$$|B_A| = |B|_{|A|},$$

provando que

$$B_A \sim B_{|A|}.$$

Como na prova do Teorema 55, seja f uma enumeração de A e seja $F\colon B^A \to B^{|A|}$ a bijeção dada por

$$F(h) = (h(f(1)), \dots, h(f(|A|))).$$

Basta observar que se h é uma função injetora, então $F(h)$ será uma sequência sem elementos repetidos de tamanho $|A|$ sobre B, isto é,

$$F(B_A) = B_{|A|},$$

e daí, como F é bijetora,

$$B_A \sim B_{|A|}.$$

□

No modelo de bolas e urnas, funções injetoras correspondem a distribuições das bolas pelas urnas de maneira que nenhuma urna tenha mais que uma bola.

Mais precisamente, funções injetoras $B \to U$ correspondem a distribuições das bolas de B pelas urnas em U de maneira que nenhuma urna tenha mais que uma bola.

Corolário 63. *Existem n_k maneiras de distribuir k bolas distintas por n urnas distintas de maneira que nenhuma urna receba mais que uma bola.*

Unidade 61

O Problema dos Aniversários

Assumindo que as datas de aniversário de um grupo de n pessoas são equiprováveis,

1. qual a probabilidade de duas delas terem aniversários coincidentes?
2. qual deve ser o valor de n para que essa probabilidade seja superior a 50%?

Vimos no Exercício 168 que o número de maneiras de se distribuirem os aniversários de n pessoas é 365^n, que é o número de funções $[n] \to 365$.

O número de maneiras de distribuir estes aniversários sem que haja coincidências é o número de funções injetoras $[n] \to 365$ que é (C. 62) 365_n.

Então a chance de não haver coincidência de aniversários num grupo de n pessoas é

$$p(n) = \frac{365_n}{365^n}.$$

Uma estimativa do valor de $p(n)$ pode ser obtida assim

$$\begin{aligned} p(n) = \frac{365_n}{365^n} &= \frac{365(365-1)\dots(365-(n-1))}{365(365)\dots(365)} \\ &= \frac{365}{365} \times \frac{365-1}{365} \times \dots \times \frac{365-(n-1)}{365} \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} \frac{365-i}{365} = \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{365}\right). \end{aligned}$$

A série de Taylor para e^x é

$$\sum_{i \geq 0} \frac{x^i}{i!} = e^x, \text{ para todo } x \in \mathbb{C},$$

e daí,

$$e^{-x} = \frac{(-x)^0}{0!} + \frac{(-x)^1}{1!} + \frac{(-x)^2}{2!} + \ldots = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots > 1 - x$$

e daí,

$$1 - x < e^{-x}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Então

$$p(n) = \frac{365_n}{365^n} = \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{365}\right) < \prod_{i=0}^{n-1} e^{-i/365} = e^{-\sum_{i=0}^{n-1} i/365}.$$

Como

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{365} = \frac{1}{365} \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{365} \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(n-1)}{730} > \frac{(n-1)^2}{730},$$

para todo $n > 0$, então,

$$\frac{n(n-1)}{730}$$

então

$$p(n) < e^{-\sum_{i=0}^{n-1} i/365} < e^{-\frac{(n-1)^2}{730}}.$$

Então, para ter

$$p(n) < \frac{1}{2},$$

basta ter

$$e^{-\frac{(n-1)^2}{730}} \leq \frac{1}{2},$$

ou seja,

$$e^{\frac{(n-1)^2}{730}} \geq 2,$$

ou seja,

$$\frac{(n-1)^2}{730} \geq \ln 2$$

ou seja,

$$n \geq \sqrt{730 \ln 2} + 1 > 22 + 1 = 23.$$

Então, para ter

$$p(n) < \frac{1}{2},$$

basta ter

$$n \geq 24.$$

Calculando os valores de $p(n)$ exatamente temos

$$0,49 < p(23) < \frac{1}{2} < p(22) < 0,52.$$

Unidade 62

Permutações

Exercícios 177 a 179

Corolário 64. *Se A e B são conjuntos finitos com o mesmo número de elementos, o número de funções bijetoras $A \to B$ é $|A|!$.*

Demonstração. Sejam A e B conjuntos finitos com o mesmo número de elementos. Então cada função injetora $A \to B$ é bijetora e o número de tais funções é

$$|B_A| = |B|_{|A|} = |A|_{|A|} = |A|!$$

$\square$

Bijeções $A \to A$ também são conhecidas pelo nome de *permutações* sobre A.

Corolário 65. *O número de permutações sobre um conjunto de n elementos é $n!$.*

O conjunto das permutações sobre um conjunto A será denotado $A!$.

Na correspondência natural entre funções $A \to A$ e sequências de $A^{|A|}$, funções bijetoras sobre A correspondem a sequências sobre A onde cada elemento de A aparece exatamente uma vez. Sequências assim também são chamadas de *permutações* dos elementos de A.

No modelo de bolas e urnas, funções bijetoras $B \to U$ correspondem a distribuições das distintas bolas de B pelas distintas urnas em U de maneira que cada urna tenha exatamente uma bola.

Corolário 66. *Existem $n!$ maneiras de distribuir n bolas distintas por n urnas distintas de tal maneira que cada urna receba exatamente uma bola.*

Exercício 176 Colocando todos os números obtidos pelas permutações dos dígitos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ em ordem crescente, qual o lugar ocupado pelo número 43 521?

Resposta:

O conjunto dos números obtidos pelas permutações dos dígitos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ que são menores que 43 521 é

$$\begin{aligned}M = \{1\} \times \{2,3,4,5\}! \cup \{2\} \times \{1,3,4,5\}! \cup \{3\} \times \{1,2,4,5\}!\\ \cup \{4\} \times \{1\} \times \{2,3,5\}! \cup \{4\} \times \{2\} \times \{1,3,5\}!\\ \cup \{4\} \times \{3\} \times \{1\} \times \{2,5\}! \cup \{4\} \times \{3\} \times \{2\} \times \{1,5\}!\\ \cup \{4\} \times \{3\} \times \{5\} \times \{1\} \times \{2\}!\end{aligned}$$

e daí,

$$\begin{aligned}
|M| &= |\{1\}\times\{2,3,4,5\}! \cup \{2\}\times\{1,3,4,5\}! \cup \{3\}\times\{1,2,4,5\}! \\
&\quad \cup \{4\}\times\{1\}\times\{2,3,5\}! \cup \{4\}\times\{2\}\times\{1,3,5\}! \\
&\quad \cup \{4\}\times\{3\}\times\{1\}\times\{2,5\}! \cup \{4\}\times\{3\}\times\{2\}\times\{1,5\}! \\
&\quad \cup \{4\}\times\{3\}\times\{5\}\times\{1\}\times\{2\}!| \\
&\overset{\text{C. } 44}{=} |\{1\}\times\{2,3,4,5\}!| + |\{2\}\times\{1,3,4,5\}!| + |\{3\}\times\{1,2,4,5\}!| \\
&\quad + |\{4\}\times\{1\}\times\{2,3,5\}!| + |\{4\}\times\{2\}\times\{1,3,5\}!| \\
&\quad + |\{4\}\times\{3\}\times\{1\}\times\{2,5\}!| + |\{4\}\times\{3\}\times\{2\}\times\{1,5\}!| \\
&\quad + |\{4\}\times\{3\}\times\{5\}\times\{1\}\times\{2\}!| \\
&\overset{\text{C. } 51}{=} |\{1\}|\,|\{2,3,4,5\}!| + |\{2\}|\,|\{1,3,4,5\}!| + |\{3\}|\,|\{1,2,4,5\}!| \\
&\quad + |\{4\}|\,|\{1\}|\,|\{2,3,5\}!| + |\{4\}|\,|\{2\}|\,|\{1,3,5\}!| \\
&\quad + |\{4\}|\,|\{3\}|\,|\{1\}|\,|\{2,5\}!| + |\{4\}|\,|\{3\}|\,|\{2\}|\,|\{1,5\}!| \\
&\quad + |\{4\}|\,|\{3\}|\,|\{5\}|\,|\{1\}|\,|\{2\}!| \\
&\overset{\text{C. } 65}{=} 1\times|\{2,3,4,5\}|! + 1\times|\{1,3,4,5\}|! + 1\times|\{1,2,4,5\}|! \\
&\quad + 1\times 1\times|\{2,3,5\}|! + 1\times 1\times|\{1,3,5\}|! \\
&\quad + 1\times 1\times 1\times|\{2,5\}|! + 1\times 1\times 1\times|\{1,5\}|! \\
&\quad + 1\times 1\times 1\times 1\times|\{2\}|! \\
&= 4! + 4! + 4! + 3! + 3! + 2! + 2! + 1! \\
&= 3\times 4! + 2\times 3! + 2\times 2! + 1! \\
&= 89
\end{aligned}$$

O lugar ocupado pelo número 43521 é, portanto, 90.

Unidade 63

Permutações Circulares

Exercícios 180 a 183

Dizemos que duas permutações sobre A são *circularmente equivalentes* se "preservam as vizinhanças".

Por exemplo, $(1, 2, 3, 4, 5)$, $(3, 4, 5, 1, 2)$ e $(5, 1, 2, 3, 4)$ são permutações circularmente equivalentes sobre $[5]$.

Mais formalmente, dizemos que duas sequências $u = (u_1, \ldots, u_n)$ e $v = (v_1, \ldots, v_n)$ são circularmente equivalentes se existe $k \in [0..n-1]$ tal que

$$u_i = v_{i+k \bmod n}, \text{ para todo } i \in [n].$$

O conjunto das permutações sobre um conjunto finito A que não são circularmente equivalentes é conhecido pelo nome de conjunto das *permutações circulares* sobre A.

Qual o número de permutações sobre $[n]$ que não são circularmente equivalentes?

Seja $F\colon [n]! \to [n]_{n,1}$ a função que associa a cada permutação de $f \in [n]!$ a permutação circularmente equivalente a f que começa por 1, isto é, se

$$f = (a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k = 1, a_{k+1}, \ldots, a_n),$$

então

$$F(f) = (1, a_{k+1}, \ldots, a_1, \ldots, a_{k-1}).$$

Então, para cada permutação $f \in [n]!$, o conjunto $F^{-1}((1, a_{k+1}, \ldots, a_1, \ldots, a_{k-1}))$ é o conjunto das permutações circularmente equivalentes a f e a quantidade de tais conjuntos é o número de permutações sobre $[n]$ não circularmente equivalentes.

Noutras palavras, o número de permutações não circularmente equivalentes sobre $[n]$ é $|[n]_{n,1}|$.

Do Corolário 46 temos

$$|[n]!| = \sum_{f \in F([n]!)} |F^{-1}(f)| = \sum_{f \in [n]_{n,1}} |F^{-1}(f)| = \sum_{f \in [n]_{n,1}} n = n|[n]_{n,1}|,$$

ou seja,

$$|[n]_{n,1}| = \frac{|[n]!|}{n} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Teorema 67. *O número de permutações circulares sobre um conjunto de n elementos é $(n-1)!$*

Exercício 180 Dois meninos e três meninas formarão uma roda dando-se as mãos. De quantos modos diferentes poderão formar a roda de modo que os dois meninos não fiquem juntos?

Resposta:

Cada modo diferente de as crianças formarem a roda corresponde a uma permutação circular das crianças. O número de tais permutações é

$$(5-1)! = 4! = 24.$$

O número de modos em que os meninos ficam juntos corresponde a tratar os dois meninos como se fossem um só. Se houvesse um só menino teríamos

$$(4-1)! = 3! = 6$$

modos diferentes de formar a roda. Para cada um destes, temos duas configurações possíveis, a saber, um deles à esquerda do outro e vice–versa. Assim, o número de modos diferentes de formar a roda em que os meninos ficam juntos é $2 \times 6 = 12$ e o número de modos diferentes de formar a roda de modo que os dois meninos não fiquem juntos é $24 - 12 = 12$.

Unidade 64

Subconjuntos com Número Fixo de Elementos (1)

Quantos subconjuntos de k elementos tem um conjunto finito de n elementos?

Notação. *Se A é um conjunto finito e $k \in \mathbb{N}$, o conjunto dos subconjuntos de k elementos de A será denotado $\binom{A}{k}$, isto é,*

$$\binom{A}{k} := \{S \subseteq A \mid |S| = k\},$$

A pergunta então é qual o valor de

$$\left|\binom{A}{k}\right|.$$

Teorema 68. *Se A é um conjunto finito e $k \in \mathbb{N}$, então*

$$\left|\binom{A}{k}\right| = \binom{|A|}{k}.$$

Demonstração. Seja A um conjunto finito e seja $k \in \mathbb{N}$ e seja $F\colon A_k \to \binom{A}{k}$ a função dada por

$$F((a_1, \dots, a_k)) = \{a_1, \dots, a_k\}.$$

Para cada $S \in \binom{A}{k}$ temos

$$F^{-1}(S) = S!,$$

e portanto

$$|F^{-1}(S)| = |S|! = k!,$$

e consequentemente (Corolário 46)

$$|A_k| = \sum_{S \in F(A_k)} |F^{-1}(S)| = \sum_{S \in \binom{A}{k}} |S!| \overset{\text{C. } 65}{=} \sum_{S \in \binom{A}{k}} |S|! = \sum_{S \in \binom{A}{k}} k! \overset{\text{T. } 4}{=} \left|\binom{A}{k}\right| k!$$

e portanto,

$$\left|\binom{A}{k}\right| = \frac{|A_k|}{k!} \overset{\text{C. } 62}{=} \frac{|A|_k}{k!} = \frac{\frac{|A|!}{(|A|-k)!}}{k!} = \frac{|A|!}{k!(|A|-k)!} = \binom{|A|}{k}.$$

$\square$

Unidade 65

Subconjuntos com Número Fixo de Elementos (2)

Exercício 184 A mega–sena é uma loteria onde são sorteados 6 dentre os números de 1 a 60, sendo todos os resultados possíveis equiprováveis.

Para cada $k \geq 6$, uma *k-aposta* é uma escolha de k dentre os números de 1 a 60. Ganha-se a loteria com uma k–aposta se 6 dentre os k números que compõem esta k–aposta são os sorteados. Uma *aposta simples* é uma 6-aposta.

1. Quantos são os resultados possíveis de um sorteio da mega-sena?

2. Qual a chance de ganhar a mega-sena com uma aposta simples?

3. Quantas vezes maior a chance de ganhar a mega-sena com uma 7–aposta, comparada com a chance de ganhar com uma aposta simples?

4. Em geral, quantas vezes maior a chance de ganhar a mega-sena com uma k–aposta, comparada com a chance de ganhar com uma aposta simples?

Resposta:

1. Cada possível resultado de um sorteio é um subconjunto de 6 elementos de $[60]$. O número de possíveis resultados na mega–sena é

$$\left|\binom{[60]}{6}\right| = \binom{|[60]|}{6} = \binom{60}{6} = \frac{60!}{54!6!} = 50\,063\,860.$$

2. Este também é o número de apostas simples. A chance de ganhar com uma aposta simples, portanto, é

$$\frac{1}{50\,063\,860} < \frac{1}{50\,000\,000}.$$

3. Uma 7-aposta é um subconjunto de 7 elementos de [60]. O número de 7-apostas possíveis é

$$\left|\binom{[60]}{7}\right| = \binom{|[60]|}{7} = \binom{60}{7} = \frac{60!}{53! \times 7!} = 386\,206\,920.$$

A chance de ganhar com uma 7-aposta $A = \{a_1, \ldots, a_7\}$ é a chance de que algum subconjunto de 6 elementos de A seja o sorteado. O número de tais subconjuntos é

$$\left|\binom{A}{6}\right| = \binom{|A|}{6} = \binom{7}{6} = \frac{7!}{1! \times 6!} = 7,$$

e, portanto, a chance de ganhar com uma 7–aposta é

$$\frac{7}{\binom{60}{6}},$$

ou seja, 7 vezes maior que a chance de ganhar com uma aposta simples.

4. Uma k-aposta é um subconjunto de k elementos de [60]. O número de k-apostas possíveis é

$$\left|\binom{[60]}{k}\right| = \binom{|[60]|}{k} = \binom{60}{k}.$$

A chance de ganhar com uma k-aposta $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ é a chance de que algum subconjunto de 6 elementos de A seja o sorteado. O número de tais subconjuntos é

$$\left|\binom{A}{6}\right| = \binom{|A|}{6} = \binom{k}{6},$$

e, portanto, a chance de ganhar com uma k–aposta é

$$\frac{\binom{k}{6}}{\binom{60}{6}} = \frac{k_6}{60_6} = \frac{k_6}{36\,045\,979\,200},$$

ou $\binom{k}{6} = k_6/720$ vezes maior que a chance de ganhar com uma aposta simples.

k	$\binom{k}{6}$
6	1
7	7
8	28
9	84
10	210
11	462
12	924
13	1716
14	3003
15	5005

Unidade 66

Subconjuntos com Número Fixo de Elementos (3)

Seja A um conjunto finito de n elementos. É evidente que

$$\bigcup_{k=0}^{|A|} \binom{A}{k} = 2^A,$$

e como os conjuntos $\binom{A}{k}: 0 \leq k \leq |A|$ são dois a dois disjuntos entre si, então (Teorema 43)

$$\left| \bigcup_{k=0}^{|A|} \binom{A}{k} \right| = \sum_{k=0}^{|A|} \left| \binom{A}{k} \right| = \sum_{k=0}^{|A|} \binom{|A|}{k},$$

e como

$$\left| 2^A \right| = 2^{|A|},$$

temos

$$\sum_{k=0}^{|A|} \binom{|A|}{k} = 2^{|A|},$$

Corolário 69. *Para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Unidade 67

Subconjuntos com Número Fixo de Elementos (4)

Teorema 70. *Se A é um conjunto, então*

$$\binom{A}{k} = \binom{A - \{a\}}{k} \cup \left\{ S \cup \{a\} \mid S \in \binom{A - \{a\}}{k-1} \right\},$$

para todo $a \in A$.

Demonstração. Exercício 13. $\square$

Exercício 13 Seja A um conjunto e seja $k \in \mathbb{N}$. Vamos denotar por $\binom{A}{k}$ o conjunto dos subconjuntos de k elementos de A, isto é,

$$\binom{A}{k} = \{S \subseteq A \mid |S| = k\}.$$

Dado $a \in A$, sejam

$$\begin{aligned} A^- &= \binom{A - \{a\}}{k}, \\ A^+ &= \binom{A - \{a\}}{k-1}, \\ \overline{A} &= \left\{ S \cup \{a\} \mid S \in A^+ \right\}. \end{aligned}$$

Prove que

$$\binom{A}{k} = A^- \cup \overline{A},$$

Resposta:

Vamos provar que

$$\binom{A}{k} = A^- \cup \overline{A}$$

provando que

$$\begin{aligned} \binom{A}{k} &\subseteq A^- \cup \overline{A}, \text{ e} \\ A^- \cup \overline{A} &\subseteq \binom{A}{k}. \end{aligned}$$

Para provar que

$$A^- \cup \overline{A} \subseteq \binom{A}{k},$$

basta observar que decorre diretamente das respectivas definições de A^- e $\overline{A}$ que

$$\begin{aligned} A^- &\subseteq \binom{A}{k}, \text{ e} \\ \overline{A} &\subseteq \binom{A}{k}. \end{aligned}$$

Resta então provar que

$$\binom{A}{k} \subseteq A^- \cup \overline{A},$$

ou seja, que

$$X \in \binom{A}{k} \implies X \in A^- \cup \overline{A}, \text{ para todo } X \in \binom{A}{k}.$$

Seja então $X \in \binom{A}{k}$. Vamos provar que

$$X \in A^- \cup \overline{A}.$$

No caso em que $X \in A^-$, não há mais nada a fazer.

Se, por outro lado, $X \notin A^-$, então é porque $a \in X$.

Neste caso, seja $X' = X - \{a\}$ e observe que $X' \subseteq A - \{a\}$ e que

$$|X'| = |X - \{a\}| = |X| - |\{a\}| = k - 1,$$

e portanto, $X' \in \binom{A-\{a\}}{k-1} = A^+$.

Consequentemente,

$$X = X' \cup \{a\} \in \overline{A}.$$

Corolário 71. *Para todo $n, k > 0$,*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Demonstração. Sejam $n > 0$ e $k > 0$. Vamos provar que

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Do Teorema 70 temos que

$$\begin{aligned}\binom{[n]}{k} &= \binom{[n]-\{n\}}{k} \cup \left\{S \cup \{n\} \mid S \in \binom{[n]-\{n\}}{k-1}\right\} \\ &= \binom{[n-1]}{k} \cup \left\{S \cup \{n\} \mid S \in \binom{[n-1]}{k-1}\right\},\end{aligned}$$

e portanto,

$$\left|\binom{[n]}{k}\right| = \left|\binom{[n-1]}{k} \cup \left\{S \cup \{n\} \mid S \in \binom{[n-1]}{k-1}\right\}\right|.$$

Como $\binom{[n]-\{n\}}{k}$ e $\left\{S \cup \{n\} \mid S \in \binom{[n-1]}{k-1}\right\}$ são disjuntos entre si, então (Teorema 43)

$$\begin{aligned}\left|\binom{[n]}{k}\right| &= \left|\binom{[n-1]}{k}\right| + \left|\left\{S \cup \{n\} \mid S \in \binom{[n-1]}{k-1}\right\}\right| \\ &= \binom{n-1}{k} + \left|\binom{[n-1]}{k-1}\right| \\ &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.\end{aligned}$$

□

Teorema 72. *O número de maneiras de distribuir k bolas idênticas por n urnas distintas de maneira que nenhuma urna receba mais do que uma bola é $\binom{n}{k}$.*

Demonstração. Cada distribuição de k bolas idênticas por n urnas distintas de maneira que nenhuma urna receba mais do que uma bola corresponde à escolha de um subconjunto de k dentre as n urnas que receberão uma bola cada. □

Unidade 68

Permutações com Repetições

Dados $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ definimos o *coeficiente multinomial*

$$\binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_1, \ldots, n_k} := \frac{(n_1 + \ldots + n_k)!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}. = \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right)!}{\prod_{i=1}^{k} n_i!}$$

Observe que, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k, n-k} = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Teorema 73. *Para todo $k \geq 2$,*

$$\binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_1, \ldots, n_k} = \binom{n_1 + \ldots + n_{k-1}}{n_1, \ldots, n_{k-1}} \binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_k}.$$

Demonstração. Exercício 57 □

Teorema 74. *O número de permutações distintas de elementos de $\{a_1, \ldots, a_k\}$ quando há n_i exemplares de a_i para cada $1 \leq i \leq k$ é*

$$\binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_1, \ldots, n_k}$$

Demonstração. Por indução em k.

HI: Seja $t \in \mathbb{N}$ tal que, o número de permutações distintas de elementos de $\{a_1, \ldots, a_p\}$ quando há n_i exemplares de a_i para cada $1 \leq i \leq p$ é

$$\binom{n_1 + \ldots + n_p}{n_1, \ldots, n_p},$$

para todo $p \in [1..t]$.

Passo: Vamos provar que o número de permutações distintas de elementos de $\{a_1, \ldots, a_{t+1}\}$ quando há n_i exemplares de a_i para cada $1 \leq i \leq t+1$ é

$$\binom{n_1 + \ldots + n_{t+1}}{n_1, \ldots, n_{t+1}}.$$

Seja $n := n_1 + \ldots + n_{t+1}$ e seja P^+ o conjunto das permutações distintas de elementos de $\{a_1, \ldots, a_{t+1}\}$ quando há n_i exemplares de a_i para cada $1 \leq i \leq t+1$.

Do mesmo modo, seja P o conjunto das permutações distintas de elementos de $\{a_1, \ldots, a_t\}$ quando há n_i exemplares de a_i para cada $1 \leq i \leq t$.

Seja então $F\colon P^+ \to P \times \binom{[n]}{n_{t+1}}$ a função dada por

$$F(x_1, \ldots, x_n) := ((y_1, \ldots, y_{n-n_{t+1}}), \{i_1, \ldots, i_{n_{t+1}}\})$$

onde

1. $\{i_1, \ldots, i_{n_{t+1}}\}$ são os índices de $(x_1, \ldots, x_n)$ onde a_{t+1} ocorre, isto é,
$$x_{i_j} = a_{t+1}, \text{ para todo } j \in \{i_1, \ldots, i_{n_{t+1}}\}.$$
2. $(y_1, \ldots, y_{n-n_{t+1}})$ é a sequência obtida de $(x_1, \ldots, x_n)$ retirando as ocorrências de a_{t+1}, isto é
$$(y_1, \ldots, y_{n-n_{t+1}}) = (x_1, \ldots, x_{i_1-1}, x_{i_1+1}, \ldots, x_{i_{n_{t+1}}-1}, x_{i_{n_{t+1}}+1}, \ldots, x_n)$$

Basta provar que F é bijeção para concluir que

$$\begin{aligned}
|P^+| &= \left| P \times \binom{[n]}{n_t} \right| \\
&= |P| \left| \binom{[n]}{n_{t+1}} \right| \overset{\text{HI}}{=} \binom{n_1 + \ldots + n_t}{n_1, \ldots, n_t} \binom{n}{n_{t+1}} \\
&= \binom{n_1 + \ldots + n_t}{n_1, \ldots, n_t} \binom{n_1 + \ldots + n_{t+1}}{n_{t+1}} \\
&\overset{\text{T. 73}}{=} \binom{n_1 + \ldots + n_{t+1}}{n_1, \ldots, n_{t+1}}
\end{aligned}$$

Base: Vamos provar que o número de permutações distintas de elementos de $\{a_1\}$ quando há n_1 exemplares de a_1 é

$$\binom{n_1}{n_1}.$$

Basta observar que o número de permutações distintas de elementos de $\{a_1\}$ quando há n_1 exemplares de a_1 é 1 e que

$$\binom{n_1}{n_1} = 1.$$

$\square$

Unidade 69

Composições de Inteiros

Exercícios 197 a 199

Dados $n \geq k \in \mathbb{N}$, uma *k-composição* de n é uma decomposição de n em k parcelas positivas.

Mais precisamente, uma *k-composição* é uma sequência $(x_1, \ldots, x_k) \in [n]^k$ satisfazendo

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = n.$$

Em outras palavras, uma k-composição de n é uma *solução inteira positiva* de

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = n.$$

Por exemplo, $(1, 2, 2)$, $(1, 1, 3)$, $(1, 3, 1)$ e $(2, 2, 1)$ são 3-composições de 5.

Teorema 75. *Dados $k, n \in \mathbb{N}$, o número de k-composições de n é*

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

Demonstração. Dados $k, n \in \mathbb{N}$, vamos denotar por $C(n, k)$ o conjunto das k-composições de n, isto é,

$$C(n, k) := \left\{ (x_1, \ldots, x_k) \in [n]^k \mid \sum_{i=1}^{k} x_i = n \right\}.$$

Seja $F\colon \binom{[n-1]}{k-1} \to C(n,k)$ a função dada por

$$F(\{a_1,\ldots,a_{k-1}\}) = (a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_2, \ldots, a_{k-1} - a_{k-2}, n - a_{k-1}),$$

sendo

$$a_i < a_{i+1}, \text{ para todo } 1 \leq i < k-1.$$

Basta provar que F é bijetora e daí

$$|C(n,k)| \overset{\text{C. 42}}{=} \left|\binom{[n-1]}{k-1}\right| \overset{\text{T. 68}}{=} \binom{|[n-1]|}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}.$$

□

Cada k-composição de n corresponde a uma distribuição de n bolas idênticas por k urnas distintas onde nenhuma urna fica vazia.

Observe que, *ao contrário da convenção usada até aqui*, neste caso *n é o número de bolas e k é o número de urnas.*

Corolário 76. *Existem $\binom{n-1}{k-1}$ maneiras de distribuir n bolas idênticas por k urnas distintas de maneira que nenhuma urna fique vazia.*

Unidade 70

Composições Fracas de Inteiros

Exercícios 200 a 202

Dados $n \geq k \in \mathbb{N}$, uma *k-composição fraca* de n é uma decomposição de n em k parcelas não-negativas.

Mais precisamente, uma *k-composição fraca* é uma sequência $(x_1, \dots, x_k) \in [0..n]^k$ satisfazendo

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = n.$$

Em outras palavras, uma k-composição-fraca de n é uma *solução inteira não negativa* de

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = n.$$

Por exemplo, $(1, 2, 2)$, $(0, 2, 3)$, $(1, 3, 1)$ e $(4, 0, 1)$ são 3-composições fracas de 5.

Teorema 77. *O número de k-composições fracas de $n \in \mathbb{N}$ é*

$$\binom{n+k-1}{k-1}.$$

Demonstração. Dados $k, n \in \mathbb{N}$, vamos denotar por $C(n, k)$ o conjunto das k-composições de n e por $F(n, k)$ o conjunto das k-composições fracas de n.

Seja $G\colon F(n, k) \to C(n + k, k)$ a função dada por

$$G((a_1, \dots, a_k)) = (a_1 + 1, \dots, a_k + 1).$$

Basta provar que G é bijetora e daí

$$|F(n,k)| = |C(n+k,k)| = \binom{n+k-1}{k-1}.$$

$\square$

Cada k-composição fraca de n corresponde a uma distribuição de n bolas idênticas por k urnas distintas.

Corolário 78. *Existem* $\binom{n+k-1}{k-1}$ *maneiras de distribuir* n *bolas idênticas por* k *urnas distintas.*

Unidade 71

O Princípio da Inclusão/Exclusão

Exercícios 203 a 210

Teorema 79. *A interseção de conjuntos é uma operação associativa.*

Se $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos e $I = \{i_1, \ldots i_k\} \subseteq [n]$, definimos

$$\bigcap_{i \in I} A_i := A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}.$$

71.1 União de 2 Conjuntos

Do Corolário 48 temos que se A_1 e A_2 são conjuntos finitos, então

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

71.2 União de 3 Conjuntos

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |(A_1 \cup A_2) \cup A_3| \overset{\text{C. } 48}{=} |A_1 \cup A_2| + |A_3| - |(A_1 \cup A_2) \cap A_3|.$$

Como

$$(A_1 \cup A_2) \cap A_3 = (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3) = B_1 \cup B_2,$$

onde

$$\begin{aligned} B_1 &:= A_1 \cap A_3, \\ B_2 &:= A_2 \cap A_3. \end{aligned}$$

Então

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1 \cup A_2| + |A_3| - |B_1 \cup B_2|.$$

Como (C. 48)

$$|B_1 \cup B_2| = |B_1| + |B_2| - |B_1 \cap B_2|,$$

e

$$B_1 \cap B_2 = (A_1 \cap A_3) \cap (A_2 \cap A_3) = A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

então

$$\begin{aligned} |B_1 \cup B_2| &= |B_1| + |B_2| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1 \cup A_2| + |A_3| - (|A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|) \\ &= |A_1 \cup A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|. \end{aligned}$$

Como (C. 48)

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|,$$

então

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = & |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| \\ & + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ = & |A_1| + |A_2| + |A_3| - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) \\ & + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \end{aligned}$$

71.3 União de 4 Conjuntos

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= |(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cup A_4| \\
&\overset{\text{C. 48}}{=} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| + |A_4| - |(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap A_4|
\end{aligned}
$$

Como

$$(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap A_4 = (A_1 \cap A_4) \cup (A_2 \cap A_4) \cup (A_3 \cap A_4) = B_1 \cup B_2 \cup B_3,$$

onde

$$
\begin{aligned}
B_1 &:= A_1 \cap A_4, \\
B_2 &:= A_2 \cap A_4, \\
B_3 &:= A_3 \cap A_4.
\end{aligned}
$$

Então

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = |A_1 \cup A_2 \cup A_3| + |A_4| - |B_1 \cup B_2 \cup B_3|$$

Como visto acima

$$|B_1 \cup B_2 \cup B_3| = |B_1| + |B_2| + |B_3| - (|B_1 \cap B_2| + |B_1 \cap B_3| + |B_2 \cap B_3|) + |B_1 \cap B_2 \cap B_3|.$$

Observe que

$$B_1 \cap B_2 = (A_1 \cap A_4) \cap (A_2 \cap A_4) = A_1 \cap A_2 \cap A_4,$$

e

$$B_1 \cap B_3 = (A_1 \cap A_4) \cap (A_3 \cap A_4) = A_1 \cap A_3 \cap A_4,$$

e

$$B_2 \cap B_3 = (A_2 \cap A_4) \cap (A_3 \cap A_4) = A_2 \cap A_3 \cap A_4,$$

de forma que

$$|B_1 \cap B_2| + |B_1 \cap B_3| + |B_2 \cap B_3| = |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|.$$

Do mesmo modo,

$$B_1 \cap B_2 \cap B_3 = (A_1 \cap A_4) \cap (A_2 \cap A_4) \cap (A_3 \cap A_4) = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4,$$

de forma que

$$\begin{aligned}|B_1 \cup B_2 \cup B_3| = & |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4| \\ & - (|A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) \\ & + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = & |A_1 \cup A_2 \cup A_3| + |A_4| \\ & - (|A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4| \\ & \ - (|A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) \\ & \ + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|),\end{aligned}$$

Como visto acima

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|,$$

e daí,

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = & |A_1| + |A_2| + |A_3| \\ & - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) \\ & + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_4| \\ & - (|A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4| \\ & \ - (|A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) \\ & \ + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|) \\ = & |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| \\ & - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) \\ & + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ & - (|A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|) \\ & + (|A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) \\ & - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\ = & |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| \\ & - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| \\ & \ + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|) \\ & + (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| \\ & \ + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) \\ & - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|.\end{aligned}$$

71.4 Caso Geral

O desenvolvimento acima leva naturalmente à seguinte forma geral.

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup \ldots \cup A_n| &= |A_1| + \ldots + |A_n| \\
&- (|A_1 \cap A_2| + \ldots + |A_{n-1} \cap A_n|) \\
&+ (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \ldots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|) \\
&- \ldots \\
&+ (-1)^{n+1}|A_1 \cap \ldots \cap A_n| \\
&= \sum_{\{i_1\} \in \binom{[n]}{1}} |A_{i_1}| \\
&- \sum_{\{i_1,i_2\} \in \binom{[n]}{2}} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| \\
&+ \sum_{\{i_1,i_2,i_3\} \in \binom{[n]}{3}} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| \\
&- \ldots \\
&+ (-1)^{n+1} \sum_{\{i_1,\ldots,i_n\} \in \binom{[n]}{n}} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n}| \\
&= \sum_{I \in \binom{[n]}{1}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| - \sum_{I \in \binom{[n]}{2}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| + \sum_{I \in \binom{[n]}{3}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| - \ldots + (-1)^{n+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{n}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \right).
\end{aligned}
$$

Teorema 80 (Princípio da Inclusão–Exclusão)**.** *Se $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos, então*

$$\left| \bigcup_{k=1}^{n} A_k \right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

Demonstração. Vamos provar que

$$\left| \bigcup_{k=1}^{n} A_k \right| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ por indução em n.

H.I.: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que, dados conjuntos finitos $A_1, \ldots, A_p$,

$$\left|\bigcup_{k=1}^{p} A_k\right| = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[p]}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

para todo $p \in [0..a]$.

Passo: Vamos provar que

$$\left|\bigcup_{k=1}^{a+1} A_k\right| = \sum_{k=1}^{a+1} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[a+1]}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

Inicialmente,

$$\begin{aligned}
\left|\bigcup_{k=1}^{a+1} A_k\right| &= \left|\left(\bigcup_{k=1}^{a} A_k\right) \cup A_{a+1}\right| \\
&\overset{\text{C. 48}}{=} \left|\bigcup_{k=1}^{a} A_k\right| + |A_{a+1}| - \left|\left(\bigcup_{k=1}^{a} A_k\right) \cap A_{a+1}\right| \\
&= \mathcal{A} + |A_{a+1}| + \mathcal{B},
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &:= \left|\bigcup_{k=1}^{a} A_k\right|, \\
\mathcal{B} &:= -\left|\left(\bigcup_{k=1}^{a} A_k\right) \cap A_{a+1}\right|.
\end{aligned}$$

Daí, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = \left|\bigcup_{k=1}^{a} A_k\right| &\overset{\text{HI}}{=} \sum_{k=1}^{a} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[a]}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| \\
&= \sum_{k=1}^{1} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[a]}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| + \sum_{k=2}^{a} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[a]}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| \\
&= \mathcal{C} + \mathcal{D},
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &:= \sum_{k=1}^{1}(-1)^{k+1}\sum_{I\in\binom{[a]}{k}}\left|\bigcap_{i\in I}A_i\right|,\\
\mathcal{D} &:= \sum_{k=2}^{a}(-1)^{k+1}\sum_{I\in\binom{[a]}{k}}\left|\bigcap_{i\in I}A_i|\right|,
\end{aligned}$$

e consequentemente,

$$\left|\bigcup_{k=1}^{a+1}A_k\right| = \mathcal{A} + |A_{a+1}| + \mathcal{B} = \mathcal{C} + \mathcal{D} + |A_{a+1}| + \mathcal{B}.$$

Como

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} + |A_{a+1}| &= \sum_{k=1}^{1}(-1)^{k+1}\sum_{I\in\binom{[a]}{k}}\left|\bigcap_{i\in I}A_i\right| + |A_{a+1}|\\
&= (-1)^{1+1}\sum_{I\in\binom{[a]}{1}}\left|\bigcap_{i\in I}A_i\right| + |A_{a+1}| = \sum_{i\in[a]}|A_i| + |A_{a+1}|\\
&= \sum_{i\in[a+1]}|A_i| = (-1)^{1+1}\sum_{I\in\binom{[a+1]}{1}}\left|\bigcap_{i\in I}A_i\right| = \sum_{k=1}^{1}(-1)^{k+1}\sum_{I\in\binom{[a+1]}{k}}\left|\bigcap_{i\in I}A_i\right|\\
&= \mathcal{E},
\end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{E} := \sum_{k=1}^{1}(-1)^{k+1}\sum_{I\in\binom{[a+1]}{k}}\left|\bigcap_{i\in I}A_i\right|,$$

então

$$\left|\bigcup_{k=1}^{a+1}A_k\right| = \mathcal{E} + \mathcal{D} + \mathcal{B}.$$

Temos

$$\mathcal{B} = -\left|\left(\bigcup_{k=1}^{a}A_k\right)\cap A_{a+1}\right|.$$

Como
$$\left(\bigcup_{k=1}^{a} A_k\right) \cap A_{a+1} \overset{\text{Ex. 59}}{=} \bigcup_{k=1}^{a}(A_k \cap A_{a+1}) = \bigcup_{k=1}^{a} B_k,$$
onde
$$B_k := A_k \cap A_{a+1}, \text{ para todo } k \in [1..a],$$
então
$$\mathcal{B} = -\left|\bigcup_{k=1}^{a} B_k\right| \overset{\text{HI}}{=} -\sum_{k=1}^{a}(-1)^{k+1} \sum_{I\in\binom{[a]}{k}} \left|\bigcap_{i\in I} B_i\right| = \sum_{k=1}^{a}(-1)^{k+2} \sum_{I\in\binom{[a]}{k}} \left|\bigcap_{i\in I} B_i\right|$$

Como para cada $I \subseteq [a]$ temos
$$\bigcap_{i\in I} B_i = \bigcap_{i\in I}(A_i \cap A_{a+1}) = \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cap A_{a+1} = \bigcap_{i\in I\cup\{a+1\}} A_i,$$
então
$$\begin{aligned}
\mathcal{B} &= \sum_{k=1}^{a}(-1)^{k+2} \sum_{I\in\binom{[a]}{k}} \left|\bigcap_{i\in I\cup\{a+1\}} A_i\right| \\
&= \sum_{k=1}^{a-1}(-1)^{k+2} \sum_{I\in\binom{[a]}{k}} \left|\bigcap_{i\in I\cup\{a+1\}} A_i\right| + \sum_{k=a}^{a}(-1)^{k+2} \sum_{I\in\binom{[a]}{k}} \left|\bigcap_{i\in I\cup\{a+1\}} A_i\right| \\
&= \mathcal{F} + \mathcal{G},
\end{aligned}$$
onde
$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &:= \sum_{k=1}^{a-1}(-1)^{k+2} \sum_{I\in\binom{[a]}{k}} \left|\bigcap_{i\in I\cup\{a+1\}} A_i\right|, \\
\mathcal{G} &:= \sum_{k=a}^{a}(-1)^{k+2} \sum_{I\in\binom{[a]}{k}} \left|\bigcap_{i\in I\cup\{a+1\}} A_i\right|.
\end{aligned}$$
de forma que
$$\left|\bigcup_{k=1}^{a+1} A_k\right| = \mathcal{E} + \mathcal{D} + \mathcal{B} = \mathcal{E} + \mathcal{D} + \mathcal{F} + \mathcal{G}.$$

Como

$$\mathcal{F} = \sum_{k=1}^{a-1}(-1)^{k+2} \sum_{I\in\binom{[a]}{k}} \left|\bigcap_{i\in I\cup\{a+1\}} A_i\right| = \sum_{k=2}^{a}(-1)^{k+1} \sum_{I\in\binom{[a]}{k-1}} \left|\bigcap_{i\in I\cup\{a+1\}} A_i\right|,$$

então

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}+\mathcal{F} &= \sum_{k=2}^{a}(-1)^{k+1} \sum_{I\in\binom{[a]}{k}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| + \sum_{k=2}^{a}(-1)^{k+1} \sum_{I\in\binom{[a]}{k-1}} \left|\bigcap_{i\in I\cup\{a+1\}} A_i\right| \\
&= \sum_{k=2}^{a}(-1)^{k+1} \left(\sum_{I\in\binom{[a]}{k}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| + \sum_{I\in\binom{[a]}{k-1}} \left|\bigcap_{i\in I\cup\{a+1\}} A_i\right| \right) \\
&\overset{\text{T. 70}}{=} \sum_{k=2}^{a}(-1)^{k+1} \sum_{I\in\binom{[a+1]}{k}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| \\
&= \mathcal{H}
\end{aligned}$$

de forma que

$$\left|\bigcup_{k=1}^{a+1} A_k\right| = \mathcal{E}+\mathcal{D}+\mathcal{F}+\mathcal{G} = \mathcal{E}+\mathcal{H}+\mathcal{G}.$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{G} &= \sum_{k=a}^{a}(-1)^{k+2} \sum_{I\in\binom{[a]}{k}} \left|\bigcap_{i\in I\cup\{a+1\}} A_i\right| \\
&= (-1)^{a+2} \sum_{I\in\binom{[a]}{a}} \left|\bigcap_{i\in I\cup\{a+1\}} A_i\right| = (-1)^{a+2} \left|\bigcap_{i\in[a]\cup\{a+1\}} A_i\right| \\
&= (-1)^{a+2} \left|\bigcap_{i\in[a+1]} A_i\right| = (-1)^{a+2} \sum_{I\in\binom{[a+1]}{a+1}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| \\
&= \sum_{k=a+1}^{a+1} (-1)^{k+1} \sum_{I\in\binom{[a+1]}{k}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
\left|\bigcup_{k=1}^{a+1} A_k\right| &= \mathcal{E} + \mathcal{H} + \mathcal{G} \\
&= \sum_{k=1}^{1} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[a+1]}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| \\
&\quad + \sum_{k=2}^{a} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[a+1]}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| \\
&\quad + \sum_{k=a+1}^{a+1} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[a+1]}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| \\
&= \sum_{k=1}^{a+1} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[a+1]}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|
\end{aligned}
$$

Base: Vamos provar que

$$
\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|,
$$

para todo $n \in [0..2]$.

$n = 0$**:** temos

$$
\left|\bigcup_{k=1}^{0} A_k\right| = |\emptyset| = 0,
$$

e

$$
\sum_{I \subseteq [0]} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| = \sum_{I \subseteq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| = 0.
$$

$n = 1$**:** temos

$$
\left|\bigcup_{k=1}^{1} A_k\right| = |A_1|,
$$

e

$$\sum_{I\subseteq[1]}(-1)^{|I|+1}\left|\bigcap_{i\in I}A_i\right| = (-1)^{|\emptyset|+1}\left|\bigcap_{i\in\emptyset}A_i\right| + (-1)^{|[1]|+1}\left|\bigcap_{i\in[1]}A_i\right|$$
$$= (-1)^{0+1}|\emptyset| + (-1)^{1+1}|A_1| = -1\times 0 + 1\times |A_1|$$
$$= |A_1|.$$

$n = 2$: temos

$$\left|\bigcup_{k=1}^{2}A_k\right| = |A_1\cup A_2|,$$

e

$$\sum_{I\subseteq[2]}(-1)^{|I|+1}\left|\bigcap_{i\in I}A_i\right| = (-1)^{|\emptyset|+1}\left|\bigcap_{i\in\emptyset}A_i\right|$$
$$+ (-1)^{|\{1\}|+1}\left|\bigcap_{i\in\{1\}}A_i\right| + (-1)^{|\{2\}|+1}\left|\bigcap_{i\in\{2\}}A_i\right|$$
$$+ (-1)^{|\{1,2\}|+1}\left|\bigcap_{i\in\{1,2\}}A_i\right|$$
$$= (-1)^{0+1}|\emptyset| + (-1)^{1+1}|A_1| + (-1)^{1+1}|A_2| + (-1)^{2+1}|A_1\cap A_2|$$
$$= -1\times 0 + 1\times|A_1| + 1\times|A_2| + -1\times|A_1\cap A_2|$$
$$= |A_1| + |A_2| - |A_1\cap A_2|.$$

que é verdade pelo Corolário 48.

□

Unidade 72

Pontos Fixos de Permutações

Dizemos que a é *ponto fixo* de uma permutação f sobre A se $f(a) = a$.

Dados $n \in \mathbb{N}$ e $I \subseteq [n]$, vamos definir

$F(n, I) :=$ permutações sobre $[n]$ para as quais todo elemento de I é ponto fixo.

Teorema 81. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $I \subseteq [n]$. O número de permutações sobre $[n]$ para as quais todo elemento de I é ponto fixo é*

$$(n - |I|)!$$

Demonstração. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $I \subseteq [n]$.

Basta provar que a função $G\colon F(n, I) \to ([n] - I)!$, que associa cada $f \in F(n, I)$ à função $Gf \in ([n] - I)!$ dada por

$$(G(f))(a) = f(a), \text{ para todo } a \in [n] - I,$$

é bijetora e daí

$$|F(n, I)| \stackrel{\text{C. 42}}{=} |([n] - I)!| \stackrel{\text{C. 47}}{=} (|[n]| - |I|)! = (n - |I|)!$$

□

Corolário 82. *Seja A um conjunto finito e seja $I \subseteq A$. O número de permutações sobre A para as quais todo elemento de I é ponto fixo é $(|A| - |I|)!$*

Teorema 83. *O número de permutações sobre $[n]$ com algum ponto fixo é*

$$n!\left(1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) \approx \left(1 - \frac{1}{e}\right) n!$$

Demonstração. Seja $F(n)$ conjunto das permutações sobre $[n]$ com algum ponto fixo.

Como

$$F(n) = \bigcup_{k=1}^{n} F(n, \{k\}),$$

então (C. 42)

$$|F(n)| = \left| \bigcup_{k=1}^{n} F(n, \{k\}) \right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} F(n, \{i\}) \right|.$$

Como

$$\bigcap_{i \in I} F(n, \{i\}) = F(n, I),$$

então

$$\begin{aligned}
|F(n)| &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} |F(n, I)| \\
&\overset{\text{T. } 83}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (n - |I|)! \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (n - k)! \\
&\overset{\text{T. } 4}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n - k)! \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!(n-k)!} (n - k)! = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!} \\
&= n! \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}.
\end{aligned}$$

Como

$$
\begin{aligned}
-\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} &= -\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} - \frac{(-1)^0}{0!}\right) \\
&= -\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} - 1\right) \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!},
\end{aligned}
$$

então,

$$|F(n)| = n! \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} = n! \left(1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right)$$

A série de Taylor para e^x é

$$e^x = \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!}.$$

Para $x = -1$ temos então

$$e^{-1} = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!},$$

e portanto,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \approx e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Assim, o número de permutações sobre $[n]$ com algum ponto fixo é

$$n! \left(1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) \approx \left(1 - \frac{1}{e}\right) n!.$$

□

Corolário 84. *O número de permutações sobre um conjunto finito A com algum ponto fixo é*

$$|A|! \left(1 - \sum_{k=0}^{|A|} \frac{(-1)^k}{k!}\right) \approx \left(1 - \frac{1}{e}\right) |A|!$$

Corolário 85. *A probabilidade de uma permutação sobre um conjunto de n elementos escolhida uniformemente ao acaso ter ponto fixo é*

$$1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \approx 1 - \frac{1}{e}$$

Corolário 86. *O número de maneiras de distribuir n bolas distintas por n urnas distintas de maneira que cada urna receba exatamente uma bola e ao menos uma bola caia na "sua" urna é*

$$n! \left(1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) \approx \left(1 - \frac{1}{e}\right) n!.$$

Unidade 73

Desarranjos

Exercícios 211 a 216

Um *desarranjo* sobre um conjunto A é uma permutação sobre A sem pontos fixos.

Teorema 87. *O número de desarranjos sobre* $[n]$ *é*

$$n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \approx \frac{n!}{e}$$

Demonstração. Dado $n \in \mathbb{N}$, seja

$$F(n) := \text{conjunto das permutações sobre } [n] \text{ com algum ponto fixo.}$$

O conjunto dos desarranjos sobre $[n]$ então é

$$D(n) = [n]! - F(n),$$

e

$$
\begin{aligned}
|D(n)| &= |[n]! - F(n)| \\
&\overset{\text{C. 47}}{=} |[n]|! - |F(n)| \\
&\overset{\text{T. 83}}{=} n! - n!\left(1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) \\
&= n!\left(1 - \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}\right)\right) \\
&= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \\
&\approx \frac{n!}{e}
\end{aligned}
$$

□

Corolário 88. *O número de desarranjos sobre um conjunto finito A é*

$$|A|! \sum_{k=0}^{|A|} \frac{(-1)^k}{k!} \approx \frac{|A|!}{e}$$

Corolário 89. *A probabilidade de uma permutação sobre um conjunto de n elementos escolhida uniformemente ao acaso não ter ponto fixo é*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \approx \frac{1}{e}$$

Corolário 90. *O número de maneiras de distribuir n bolas distintas por n urnas distintas de maneira que cada urna receba exatamente uma bola e nenhuma bola caia na "sua" urna é*

$$n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \approx \frac{n!}{e}.$$

Apêndice A

Exercícios

A.1 Elementos de Lógica

$1^{@}$. Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

(a) "$2 \leq 3$".
(b) "$10 > 20$".
(c) "$x^2 \leq x$".

$2^{@}$. Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

(a) $(1 < 2)$ e $(2 < 3) \implies (1 < 3)$,
(b) $(1 < 2) \implies (10 < 30)$,
(c) $1 > 2 \implies 2 < 3$,
(d) $1 > 2 \implies 2 > 3$.

$3^{@}$. Sejam P e Q os seguintes predicados.

$$\begin{aligned} P(x) &: x \leq x^2, \\ Q(x,y) &: x \leq y^2. \end{aligned}$$

Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

(a) $P(2)$.
(b) $P(1/2)$.

(c) $Q(1,1)$.

(d) $R(t) = Q(1,t)$.

4[@]. Seja $P(x)$ o predicado "$x \leq x^2$".

Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

(a) $P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) $P(x)$, para algum $x \in \mathbb{R}$.

(c) $P(x)$, para todo $x \geq 1$.

(d) $P(x)$, para algum $0 < x < 1$.

5[⋆]. Prove que se A, B e C são proposições, então

(a) $F \implies A$, ou seja, a partir de uma proposição falsa pode-se concluir qualquer coisa.

(b) $A \implies B \equiv (\textsf{ não } A) \textsf{ ou } B$.

(c) $(A \implies B) \equiv ((\textsf{ não } B) \implies (\textsf{ não } A))$, também conhecida como *contrapositiva* da implicação. Uma "prova de $A \implies B$ por contrapositiva" é uma prova de que $((\textsf{ não } B) \implies (\textsf{ não } A))$.

(d) $(A \implies F) \equiv \textsf{ não } A$, ou seja, uma implicação cujo consequente é falso só pode ser verdadeira se o antecedente é falso. Este é o princípio por baixo das "provas por contradição".

(e) $((A \implies B) \textsf{ ou } (A \implies C)) \equiv (A \implies (B \textsf{ ou } C))$ (distributividade da disjunção pela implicação).

(f) $((A \implies B) \textsf{ e } (A \implies C)) \equiv (A \implies (B \textsf{ e } C))$ (distributividade da conjunção pela implicação).

(g) $((B \implies A) \textsf{ ou } (C \implies A)) \equiv ((B \textsf{ e } C) \implies A)$ (outra distributividade).

(h) $((B \implies A) \textsf{ e } (C \implies A)) \equiv ((B \textsf{ ou } C) \implies A)$ (outra distributividade).

(i) $((A \implies B) \textsf{ e } (A \implies (\textsf{ não } B))) \implies (\textsf{ não } A)$ (outra maneira de expressar o princípio por baixo de uma prova por contradição).

6*. Considere os seguintes predicados.

$$\begin{aligned} I(x) &\equiv x \in \mathbb{Z}, \\ P(f,x) &\equiv I(x) \implies I(f(x)), \\ Q(f,x) &\equiv I(f(x)) \implies I(x). \end{aligned}$$

Dê um exemplo de função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que

(a) satisfaz o predicado $P(g,x),$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) não satisfaz o predicado $P(g,x),$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(c) satisfaz o predicado não $(P(g,x),$ para todo $x \in \mathbb{R})$.

(d) satisfaz o predicado $Q(g,x),$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(e) não satisfaz o predicado $Q(g,x),$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(f) satisfaz o predicado não $(Q(g,x),$ para todo $x \in \mathbb{R})$.

7$^\#$. Considere os seguintes predicados.

$$\begin{aligned} L(f) &\equiv \lim f(n) = 0, \\ P(n,f,g,h) &\equiv f(n) = g(n)(1 + h(n)), \\ B(f,g,h) &\equiv L(h) \text{ e } (P(n,f,g,h), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}), \\ A(f,g) &\equiv B(f,g,h), \text{ para algum } h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dê um exemplo de funções $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que

(a) satisfazem $A(f,g)$.

(b) não satisfazem $A(f,g)$.

8$^\#$. Seja $O(f)$ o seguinte predicado (onde $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$).

$(((n \geq k \implies |f(n)| \leq c),$ para algum $k > 0),$ para algum $c > 0),$ para todo $n \geq k$.

Avalie as seguintes proposições justificando cada uma, isto é, apresentando uma prova de se são verdadeiras ou falsas.

(a) $O(n/(n-1))$,

(b) $O(n)$,

(c) $O(10 + 1/n)$,

(d) $O(\log n)$,

(e) $O(42)$.

$9^{\#}$. Considere os seguintes predicados.

$$\begin{aligned}
P_1(f,g,c,n) &\equiv |f(n)| \leq c|g(n)|, \\
P_2(f,g,c,k) &\equiv P_1(f,g,c,n), \text{ para todo } n \geq k, \\
P_3(f,g,c) &\equiv P_2(f,g,c,k), \text{ para algum } k \in \mathbb{N}, \\
O(f,g) &\equiv P_3(f,g,c), \text{ para algum } c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Para cada par de funções $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, classifique as proposições abaixo como verdadeiras ou falsas.

(a) $O(f,g)$, para $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$.

(b) $O(g,f)$, para $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$.

(c) $O(f,g)$, para $f(n) = n/2$ e $g(n) = n$.

(d) $O(g,f)$, para $f(n) = n/2$ e $g(n) = n$.

$10^{\#}$. Sejam $D(x,y,d)$ e $M(x,y)$ os seguintes predicados, respectivamente.

$D(x,y,d)$**:** $|x-y| < d$,

$M(x,y)$**:** $x > y$.

Use os predicados $D(x,y,d)$ e $M(x,y)$ para expressar os seguintes predicados.

$L_1(f,a,l)$**:** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

$L_2(f,l)$**:** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$.

$L_3(f,a)$**:** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

$L_4(f)$**:** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

A.2 Conjuntos e Inteiros

11$^{@}$. Seja A um conjunto finito e seja $B \subseteq A$. Prove que

$$A = (A - B) \cup B,$$

12$^{\#}$. Sejam A, B e C conjuntos finitos. Prove que

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

13$^{\#}$. Seja A um conjunto e seja $k \in \mathbb{N}$. Vamos denotar por $\binom{A}{k}$ o conjunto dos subconjuntos de k elementos de A, isto é,

$$\binom{A}{k} = \{S \subseteq A \mid |S| = k\}.$$

Dado $a \in A$, sejam

$$\begin{aligned} A^- &= \binom{A - \{a\}}{k}, \\ A^+ &= \binom{A - \{a\}}{k-1}, \\ \overline{A} &= \left\{S \cup \{a\} \mid S \in A^+\right\}. \end{aligned}$$

Prove que

$$\binom{A}{k} = A^- \cup \overline{A},$$

14$^{\#}$. Dados $f, g\colon A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ e $c \in \mathbb{C}$, é verdade que

(a)
$$\prod_{x \in X} c = c|X|?$$

(b)
$$\prod_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \prod_{x \in X} f(x) + \prod_{x \in X} g(x)?$$

(c)
$$\sum_{x \in X} f(x)g(x) = \left(\sum_{x \in X} f(x)\right)\left(\sum_{x \in X} g(x)\right)?$$

Justifique.

A.3 Aproximação Assintótica

15@. A *Série Harmônica* é a série dada por

$$H(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

A diferença $H(n) - \ln n$ converge e seu limite é conhecido como *constante de Euler–Mascheroni*, isto é,

$$\lim H(n) - \ln n = \gamma := 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399 2\ldots$$

Prove que

$$H(n) \approx \ln n.$$

16@. Prove que

(a) Prove que

$$\binom{n}{2} \approx \frac{n^2}{2}$$

(b)

$$\sum_{i=1}^{n} i \approx \frac{n^2}{2}$$

(c) A partir da aproximação de Stirling,

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

prove que

$$\log_b n! \approx n \log_b n, \text{ para todo } b > 1.$$

(d) Use o resultado do Exercício 16c para provar que

$$\sum_{i=1}^{n} \log_b i \approx n \log_b n, \text{ para todo } b > 1$$

(e)

$$\lg n \approx \lfloor \lg n \rfloor \approx \lceil \lg n \rceil$$

17⁻. A partir da aproximação de Taylor

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \approx e^x, \text{ para todo } x \in \mathbb{C},$$

conclua que

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{i!} \approx \frac{1}{e}.$$

18#. Seja $P\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dado por

$$P(n) = a_0 n^0 + a_1 n^1 + a_2 n^2 + \ldots + a_k n^k,$$

com $a_k \neq 0$, um polinômio de grau k.

Prove que

$$P(n) \approx a_k n^k.$$

19#. Prove que

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \approx \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

20#. Prove que

$$\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1 \approx \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

21⋆. Seja $c \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ e seja

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} c^i.$$

Prove que

(a) se $c > 1$, então $s(n) \approx \frac{c^{n+1}}{c-1}$,

(b) se $0 < c < 1$, então $s(n) \approx \frac{1}{1-c}$.

$22^{\#}$. Sejam $F, f, g, h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $F(n) \approx f(n)$, $F(n) \approx h(n)$, e

$$f(n) \leq g(n) \leq h(n), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

Prove que, neste caso,

$$F \approx f \approx g \approx h.$$

$23^{\#}$. Sejam $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Prove que $f(n) \approx g(n)$ se e somente se existe $\varepsilon \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que

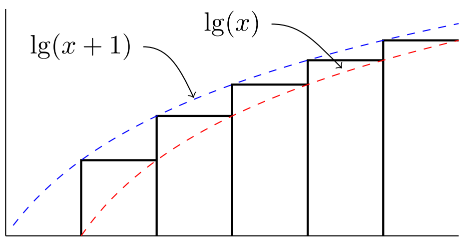
$$f(n) = g(n)(1 + \varepsilon(n)),$$

e

$$\lim \varepsilon(n) = 0.$$

$24^{\#}$. Prove que $\approx$ é uma relação de equivalência sobre o conjunto das funções $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

$25^{\#}$. A partir da observação de que



$$\int_1^n \log_b(x)dx \leq \sum_{i=1}^n \log_b i \leq \int_0^n \log_b(x+1)dx.$$

prove que

$$\sum_{i=1}^n \log_b i \approx n \log_b n.$$

A.4 Piso e Teto

26^{-}. É verdade que $\lfloor f(n) \rfloor \approx f(n)$ para toda $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$? Justifique.

27^{-}. É verdade que $\sum_{i=1}^{n} \lfloor f(i) \rfloor \approx \sum_{i=1}^{n} f(i)$ para toda $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$? Justifique.

$28^{\#}$. A soma

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor \tag{A.1}$$

aparece com certa frequência em aplicações ligadas à computação.

(a) Prove que, dado $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\lfloor \lg i \rfloor = k \text{ para todo } i \in [2^k..2^{k+1} - 1].$$

(b) Use esta observação para agrupar convenientemente os termos em (A.1).

(c) Prove que[1]

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor = n \lfloor \lg n \rfloor - \left(2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} - \lfloor \lg n \rfloor - 2\right).$$

(d) Prove que

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor \approx \sum_{i=1}^{n} \lg i.$$

(e) Prove que[2]

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor \approx n \lg n.$$

(f) Prove que

$$\lg n! \approx n \lg n.$$

(g) As proposições acima podem ser generalizadas para logaritmos em outras bases além de 2? Como?

[1]**Sugestão:** use o resultado do Exercício 37 e o fato de que $\sum_{i=0}^{n} i2^i = 2^{n+1}(n-1)+2$.
[2]**Sugestão:** use o resultado do Exercício 37

29*. Prove que $\lceil x \rceil$ é o único inteiro que satisfaz

$$x \leq \lceil x \rceil < x + 1,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

30*. Prove que

$$\lceil x \rceil + z = \lceil x + z \rceil .$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $z \in \mathbb{Z}$.

31*. Prove que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

- $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$
- $\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

32*. Sejam $n, m \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dadas por

$$\begin{aligned} n(a,b) &= b - a + 1, \\ m(a,b) &= \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor, \end{aligned}$$

Prove que, para todo $a, b \in \mathbb{Z}$,

(a) $a + b$ é par se e somente se $n(a,b)$ é ímpar.

(b) $n(a, m(a,b)) = \left\lceil \frac{n(a,b)}{2} \right\rceil$.

(c) $n(m(a,b)+1, b) = \left\lfloor \frac{n(a,b)}{2} \right\rfloor$.

(d) $n(a, m(a,b)-1) = \left\lfloor \frac{n(a,b)-1}{2} \right\rfloor$.

[3]

[3]**Sugestão:** Use o Exercício 31

33*. Prove que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

(a) $x - \lfloor x \rfloor < 1$.

(b) $\lceil x \rceil - x < 1$.

(c) $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ se e somente se $x \in \mathbb{Z}$

(d) $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$.

34*. Prove que, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que $\min\{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\}$ é o único inteiro m satisfazendo $x < m \leq x + 1$ e conclua daí que

$$\min\{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\} = \lfloor x \rfloor + 1.$$

35*. Prove que

$$\max\{k \in \mathbb{Z} \mid k < x\} = \lceil x - 1 \rceil,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

36@. Prove que

$$\frac{n}{2} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq n \leq 2^{\lceil \lg n \rceil} < 2n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$

37*. (a)

$$\frac{1}{2} < \frac{n}{2^{\lceil \lg n \rceil}} \leq 1 \leq \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} < 2$$

(b)

$$\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor = 1, \text{ para todo } n > 0.$$

(c)

$$\left\lfloor \frac{n}{2^x} \right\rfloor = 0 \text{ se e somente se } x > \lg n.$$

(d)

$$\lfloor \lg n \rfloor > \lfloor \lg(n-1) \rfloor \text{ se e somente se } n \text{ é potência de 2.}$$

(e)

$$\lceil \lg n \rceil < \lceil \lg(n+1) \rceil \text{ se e somente se } n \text{ é potência de 2.}$$

(f)
$$\lceil \lg(n+1) \rceil = \lfloor \lg n \rfloor + 1.$$

38*. Prove que, dados $n, k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor &= \frac{n - (n \bmod k)}{k}, \text{ e} \\ \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil &= \frac{n + k - (n \bmod k)}{k}, \end{aligned}$$

39*. Seja $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente e contínua satisfazendo

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Prove que
$$\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

40#. Seja k um inteiro positivo e seja $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = \frac{x}{k}.$$

Prove que

(a) f uma função contínua.

(b) f uma função crescente.

(c) $f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$

41#. Prove que

(a)
$$\sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 2^{\lfloor \lg n \rfloor} + 1 \approx n \lg n$$

(b)
$$\sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} 2^i \left\lceil \frac{n}{2^i} \right\rceil - 2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} + 1 \approx n \lg n$$

42$^-$. Se $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ são funções contínuas, então $f \circ g\colon A \to C$ é uma função contínua.

43$^-$. Sejam $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ e $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ funções crescentes. Prove que $f \circ g\colon A \to C$ é uma função crescente.

44$^-$. Sejam $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ e sejam $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ funções contínuas e crescentes satisfazendo

$$
\begin{aligned}
f(x) \in \mathbb{Z} &\implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in A, \text{ e} \\
g(x) \in \mathbb{Z} &\implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in B.
\end{aligned}
$$

Prove que

$$
\begin{aligned}
\lfloor f \circ g(\lfloor x \rfloor) \rfloor &= \lfloor f \circ g(x) \rfloor, \text{ e} \\
\lceil f \circ g(\lceil x \rceil) \rceil &= \lceil f \circ g(x) \rceil,
\end{aligned}
$$

para todo $x \in A$.

45$^-$. Dizemos que uma função $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é integralizada se

$$
f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in A,
$$

Sejam $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$. Prove que se $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ são funções integralizadas, então $f \circ g\colon A \to C$ é uma função integralizada.

A.5 Indução

46[@]. Prove que

$$\sum_{i=0}^{n} c^i = \frac{c^{n+1}-1}{c-1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $c \in \mathbb{C} - \{0,1\}$.

47[⋆]. Prove por indução que

$$\sum_{i=0}^{n} i2^i = 2^{n+1}(n-1)+2,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

48[⋆]. Dados $n, k \in \mathbb{N}$, o *coeficiente binomial* $\binom{n}{k}$ é definido da seguinte maneira

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} 1, & \text{se } k = 0, \\ \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, & \text{se } 1 \leq k \leq n, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Prove, por indução em n que, se $0 \leq k \leq n$, então

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

49[⋆]. Prove que (cfr. Exercício 48

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}, \text{ para todo } n, k \in \mathbb{N}.$$

50[⋆]. Prove por indução em n que, dados $x, y \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} = (x+y)^n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $n > 0$ [4].

[4]**Sugestão:** Use a definição de $\binom{n}{k}$ dada no Exercício 48

Conclua a partir daí que

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $n > 0$.

51$^@$. Prove por indução em n que

$$2^n < n!, \text{ para todo } n \geq 4.$$

52$^@$. A *sequência de Fibonacci* é a função $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$F(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1 \\ F(n-1) + F(n-2), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

(a) Prove por indução em n que

$$F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

(b) Conclua que

$$F(n) \approx \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

53*. Prove, por indução em n, que

(a) $\sum_{j=0}^{n} \big(F(j)\big)^2 = F(n)F(n+1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

(b) $\sum_{j=0}^{n} F(2j) = F(2n+1) - 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$

(c) $\sum_{j=1}^{n} F(2j-1) = F(2n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

(d) $F(n+1)F(n-1) - \big(F(n)\big)^2 = (-1)^n$, para todo $n > 0$

onde $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é a *sequência de Fibonacci*[5].

[5]Veja o Exercício 52

54*. Prove que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F(n+1) & F(n) \\ F(n) & F(n-1) \end{pmatrix}, \text{ para todo } n > 0,$$

onde F é a sequência de Fibonacci (cfr Exercício 52)[6].

55⁻. Prove por indução em n que

$$(\sqrt{2})^n \leq F(n+1) \leq 2^n \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde $F(n)$ denota a sequência de Fibonacci (cfr Exercício 52).

56*. O número de comparações no pior caso de uma execução do algoritmo MergeSort para um vetor de n elementos é dado pela função

$$T(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Prove que $T^-(n) \leq T(n) \leq T^+(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde T^+ e T^- são as seguintes funções.

$$T^-(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ 2T^-\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2, \end{cases}$$

$$T^+(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ 2T^+\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

57⁻. Dados $n_1, \ldots, n_k$ O *coeficiente multinomial* é definido por

$$\binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_1, \ldots, n_k} := \frac{(n_1 + \ldots + n_k)!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}.$$

Observe que o coeficiente multinomial é uma generalização do coeficiente binomial, pois

$$\binom{n}{n_1} = \binom{n}{n_1, n - n_1}.$$

[6] Este é um dos algoritmos mais eficientes para o cálculo da sequência de Fibonacci.

Prove por indução em k que

$$\binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_1, \ldots, n_k} = \binom{n_1 + \ldots + n_{k-1}}{n_1, \ldots, n_{k-1}} \binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_k}, \text{ para todo } k \geq 2.$$

58*. Use o fato de que se A e B são conjuntos finitos e disjuntos entre si então

$$|A \cup B| = |A| + |B|,$$

para provar, por indução em n que, se $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos dois a dois disjuntos entre si, então,

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

59$^@$. Prove por indução em n que se $A_1, \ldots, A_n$ e B são conjuntos, então

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B),$$

60*. Prove, por indução em $|X|$ que, se X é um conjunto finito e $c \in \mathbb{C}$, então

$$\prod_{x \in X} c = c^{|X|}.$$

61*. Prove, por indução em $|X|$ que, se X é um conjunto finito e $c \in \mathbb{C}$, então

$$\sum_{x \in X} c = c|X|.$$

62*. Prove, por indução em $|X|$ que, que se $f, g \colon A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ é um conjunto finito, então

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x).$$

63*. Prove, por indução em $|X|$ que, que se $f\colon A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ é um conjunto finito, e $c \in \mathbb{C}$, então

$$\sum_{x \in X} cf(x) = c \sum_{x \in X} f(x).$$

64*. Prove por indução que qualquer valor maior ou igual a 4 reais pode ser obtido somente com cédulas de 2 e 5 reais.

65*. Prove, por indução em n, que $n^2 - 1$ é divisível por 8 para todo $n \in \mathbb{N}$ ímpar.

66*. Considere o seguinte algoritmo, conhecido pelo nome de "busca binária".

```
Busca(x, v, a, b)
---
  Se a > b
      Devolva a − 1

  m ← ⌊(a+b)/2⌋
  Se x = v[m]
      Devolva m
  Se x < v[m]
      Devolva Busca(x, v, a, m − 1)
  Devolva Busca(x, v, m + 1, b)
```

Fazendo $n = b - a + 1$, prove que o número de comparações na execução de Busca(x, v, a, b) é no máximo $\lfloor \lg n \rfloor + 1$ para todo $n \geq 1$.

67*. Considere o seguinte algoritmo.

```
Busca(x, v, a, b)
---
  Se a > b
      Devolva a − 1

  m ← ⌊(a+b)/2⌋
  Se x < v[m]
      Devolva Busca(x, v, a, m − 1)
  Devolva Busca(x, v, m + 1, b)
```

Prove que $\mathsf{Busca}(x, v, a, b)$ é o único inteiro em $[a-1..b]$ satisfazendo

$$x < v[i] \text{ para todo } i \in [\mathsf{Busca}(x, v, a, b) + 1..b]$$

68*. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $s, m \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = s + mx, \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

Prove que

$$f^n(x) = \begin{cases} x + sn, & \text{se } m = 1, \\ m^n x + s\frac{m^n - 1}{m-1}, & \text{se } m \neq 1, \end{cases}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

69#. Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$f(n) = f(n-1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove, por indução em n, que

$$f(n) = f(0) + n, \text{ para todo } n \geq 0.$$

70#. Seja $a \in \mathbb{C}$ e seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$f(n) = f(n-1) + a, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove[7], por indução em n, que

$$f(n) = f(0) + na, \text{ para todo } n \geq 0.$$

71#. Sejam $f, s : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$f(n) = f(n-1) + s(n), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove[8], por indução em n que

$$f(n) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} s(i), \text{ para todo } n \geq 0.$$

[7] Observe que este exercício generaliza o Exercício 69.
[8] Observe que este exercício generaliza o Exercício 70.

72#. Sejam $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ e $a \in \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = af(n-1), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove por indução em n que

$$f(n) = a^n f(0), \text{ para todo } n \geq 0.$$

73#. Sejam $f, m\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = m(n)f(n-1), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove[9], por indução em n, que

$$f(n) = f(0)\prod_{i=1}^{n} m(i), \text{ para todo } n \geq 0.$$

74#. Sejam $f, s, m\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = m(n)f(n-1) + s(n), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove (por indução em n) que[10]

$$f(n) = f(0)\prod_{i=1}^{n} m(i) + \sum_{j=1}^{n}\left(s(j)\prod_{i=j+1}^{n} m(i)\right), \text{ para todo } n \geq 0.$$

A.5.1 Descrições Recursivas

75@. Sejam $l, f\colon \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$ dadas por

$l(n)$: tamanho (número de dígitos) na representação binária de n,

[9] Observe que este exercício generaliza o Exercício 72.
[10] Observe que este exercício generaliza o Exercício 73.

e

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \textsf{se } n = 1, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \textsf{se } n > 1. \end{cases}$$

Prove que

$$l(n) = f(n), \ \textsf{para todo } n > 0.$$

76[@]. Seja $l\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$l(n) = \begin{cases} 1, & \textsf{se } n = 1, \\ l\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \textsf{se } n > 1. \end{cases}$$

Prove por indução em n que

$$l(n) = \lfloor \lg n \rfloor + 1, \ \textsf{para todo } n > 0.$$

77[@]. Sejam

$b(n)$: o número de dígitos 1 na representação binária de n.

e $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função dada por

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \textsf{se } n = 0, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + (n \bmod 2) & \textsf{se } n > 0. \end{cases}$$

(a) Prove que o número de dígitos 1 na representação binária de n é $f(n)$, para todo $n \geq 0$.

(b) Prove que

$$f(n) \leq \lfloor \lg n \rfloor + 1, \ \textsf{para todo } n > 0.$$

78[⋆]. Seja $M(n)\colon \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$ dada por

$M(n) :=$ a posição do bit mais significativo na representação binária de n,

sendo que os bits são contados da direita para a esquerda a partir de 0. Por exemplo, $M(1) = 0$ e $M(10) = 3$.

(a) Proponha uma expressão recursiva para $M(n)$.

(b) Prove que a expressão proposta está correta.

79*. Considere o Algoritmo $\mathsf{Exp}(x, n)$ dado por

```
Exp(x,n)
-----------------------------
Se n = 0
    Devolva 1
e ← Exp(x, ⌊n/2⌋)
e ← e × e
Se n é par
    Devolva e
Devolva x × e
```

(a) Execute $\mathsf{Exp}(2, n)$ para $n \in \{0, 1, 2, 5, 11, 15, 16, 20\}$ e, para cada execução, mostre o resultado do algoritmo e o número de multiplicações efetuadas.

(b) Prove por indução em n que $\mathsf{Exp}(x, n) = x^n$ para todo $x \neq 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) Prove que a execução de $\mathsf{Exp}(x, n)$ efetua $\lfloor \lg(n) \rfloor + b(n) + 1$ multiplicações para todo $x \neq 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$, onde b é a função definida no Exercício 77.

(d) Prove que a execução de $\mathsf{Exp}(x, n)$ efetua no máximo $2(\lfloor \lg n \rfloor + 1)$ multiplicações para todo $x > 0$ e todo $n > 0$.

80$^@$. Considere o Algoritmo Mínimo(v, a, b) dado por

```
Minimo(v,a,b)
-----------------------------
Se a = b
    Devolva a
m ← ⌊(a+b)/2⌋
m1 ← Mínimo(v, a, m)
m2 ← Mínimo(v, m + 1, b)
Se v[m1] ≤ v[m2]
    Devolva m1
Devolva m2
```

Prove por indução em n que, dado $a \in \mathbb{Z}$, a execução de $\mathsf{Mínimo}(v, a, a+n-1)$ faz $n-1$ comparações entre elementos de v, para todo $n \geq 1$.

81⋆. Prove, por indução em n, que o seguinte algoritmo devolve $\prod_{i=1}^{n} i$, para todo $n \in \mathbb{N}$

```
Fatorial(n)
  Se n = 0
      Devolva 1
  Devolva n × Fatorial(n − 1)
```

82⋆. Prove, por indução em n, que o seguinte algoritmo devolve $3^n - 2^n$, para todo n natural.

```
A(n)
  Se n ≤ 1
      Devolva n
  Devolva 5 × A(n − 1) − 6 × A(n − 2)
```

83⋆. Considere o seguinte algoritmo

```
Multiplica(x,n)
  Se n = 0
      Devolva 0
  Se n é par
      Devolva Multiplica(x + x, n/2)
  Devolva Multiplica(x + x, (n−1)/2) + x
```

(a) Prove, por indução em n, que Multiplica(x, n) devolve o valor de nx para todo $x \in \mathbb{C}$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Enuncie e prove um teorema estabelecendo um limite superior (em função de n) para o número de somas efetuadas por Multiplica(x, n)[11].

84@. O seguinte algoritmo devolve o n-ésimo termo da sequência de Fibonacci.

```
F(n)
  Se n ≤ 1
      Devolva n
  Devolva F(n − 1) + F(n − 2)
```

[11]**Sugestão:** compare este exercício com o Exercício 79.

Prove que o número de somas na execução de $F(n)$ é pelo menos $F(n)$, para todo $n \geq 2$.

85*. (a) Combine as informações dos Exercícios 54, 77 e 79 para propor um algoritmo para o cálculo de $F(n)$.

(b) Dê uma expressão para o número $s(n)$ de somas efetuadas pelo seu algoritmo para calcular $F(n)$.

(c) Compare o resultado obtido com o número de somas efetuadas pelo algoritmo do Exercício 84.

86*. Considere o seguinte algoritmo de ordenação, conhecido como "ordenação por inserção".

```
Ordena(v, a, b)
---------------------------
  Se a ≥ b
      Devolva v
  Ordena(v, a, b − 1)
  Insere(v, a, b)
  Devolva v
```

onde Busca(x, v, a, b) é o algoritmo do Exercício 67, e

```
Insere(v, a, b)
---------------------------
  p ← Busca(v[b], v, a, b − 1)
  i ← b
  Enquanto i ≥ p + 1
      Troca(v, i, i − 1)
      i ← i − 1
  Devolva v
```

e Troca(v, a, b) troca os valores de $v[a]$ e $v[b]$ entre si.

Use o resultado dos Exercícios 28 e 66 para estabelecer um limitante superior para o número de comparações na execução de Ordena$(v, a, a+n-1)$ em função do valor de n.

87$^\#$. Proponha uma expressão recursiva para a função $B\colon \mathbb{N} - \{0\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$B(n, k) := k\text{-ésimo bit na representação binária de } n.$$

Prove que a expressão proposta está correta.

88$^{\#}$. Prove por indução em n que, se $0 \leq k \leq n$, então o seguinte algoritmo devolve $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

```
B(n, k)
----------------------------------
  Se k = 0
      Devolva 1
  Devolva nB(n-1,k-1)/k
```

89. Uma certa aplicação financeira rende j por cento do capital aplicado por mês. O rendimento é creditado no próprio saldo da aplicação.

Proponha uma expressão recursiva para a função $C(n)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de tal forma que $C(n)$ represente o saldo da aplicação após ao final de n meses, a partir de uma aplicação inicial de valor s.

90. Sejam $f^-, f, f^+ \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ funções não-decrescentes satisfazendo, para todo $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} f^-(n) &= f^-(n-2) + f^-(n-2), \\ f(n) &= f(n-1) + f(n-2), \\ f^+(n) &= f^+(n-1) + f^+(n-1), \end{aligned}$$

e ainda

$$f^-(0) \leq f(0) \leq f^+(0), \text{ e}$$
$$f^-(1) \leq f(1) \leq f^+(1).$$

Prove por indução em n que

$$f^-(n) \leq f(n) \leq f^+(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

A.5.2 Funções Iteradas

91$^{@}$. Para cada uma das funções $f(x)$ abaixo, dê uma expressão para $f^n(x)$. Em cada caso, prove por indução em n que sua resposta está correta.

(a) $f(x) = x + 1$.

(b) $f(x) = x + 2$.

(c) $f(x) = x + 3$.

(d) $f(x) = x + s$.

(e) $f(x) = 2x$.

(f) $f(x) = 3x$.

(g) $f(x) = mx$.

(h) $f(x) = s + mx$.

92*. Para cada função $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abaixo, dê uma expressão para a função h^n, onde $n \in \mathbb{N}$.

(a) $h(x) = x - 2$,

(b) $h(x) = x - s$, com $s \in \mathbb{R}$,

(c) $h(x) = 3x$

(d) $h(x) = mx$, com $m \in \mathbb{R}$,

(e) $h(x) = x/2$,

(f) $h(x) = \lceil x/k \rceil$, com $k \in \mathbb{Z}^+$,

(g) $h(x) = \lfloor \sqrt[k]{x} \rfloor$, com $k \in \mathbb{N}$,

93*. Prove que

$$f^n(x) = \left\lfloor \frac{x}{k^n} \right\rfloor, \text{ para todo } n > 0,$$

onde $k \neq 0$ e $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x) = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor.$$

94*. Prove que

$$f^n(x) = \left\lfloor \sqrt[(k^n)]{x} \right\rfloor, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde $k \in \mathbb{N}$ e $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x) = \left\lfloor \sqrt[k]{x} \right\rfloor.$$

95$^\#$. Seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfazendo

$$f(n) = f(n-2) + 1, \text{ para todo } n > 1.$$

Prove, por indução em n, que

(a) $f(n) = f(n \bmod 2) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) $f(n) = (-1)^n c_{10} + c_{20} + c_{21} n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, onde

$$\begin{aligned}
c_{10} &= \frac{f(0) - f(1)}{2} + \frac{1}{4}, \\
c_{20} &= \frac{f(0) + f(1)}{2} - \frac{1}{4}, \\
c_{21} &= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(c) $f(n) = f(4 + n \bmod 2) + \left\lceil \frac{k-5}{2} \right\rceil$, para $n \geq 5$.

96#. Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned}
h(n) &< n, \\
f(n) &= f(h(n)) + 1,
\end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$,

Prove (por indução) que

$$f(n) = f(h^u(n)) + u, \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde

$$u = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0 \right\}.$$

97#. Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f, s \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned}
h(n) &< n, \\
f(n) &= f(h(n)) + s(n),
\end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$.

Prove (por indução) que

$$f(n) = f(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)), \text{ para todo } n \geq n_0.$$

onde

$$u = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0 \right\}.$$

98$^{\#}$. Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f, m\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} h(n) &< n, \\ f(n) &= m(n)f(h(n)), \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$.

Prove (por indução em n) que, para todo $n \geq n_0$

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)),$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}.$$

99$^{\#}$. Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f, m, s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} h(n) &< n, \\ f(n) &= m(n)f(h(n)) + s(n), \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$.

Prove (por indução) que

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}.$$

A.6 Recorrências

A.6.1 Recorrências

$100^@$. Resolva a seguinte recorrência.

$$f(n) = f(n-2) + 1, \text{ para todo } n \geq 2.$$

$101^@$. Resolva a seguinte recorrência.

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

$102^@$. Resolva a seguinte recorrência.

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + (n \bmod 2) & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

$103^\star$. Resolva as seguintes recorrências.

(a) $f(n) = 2f\left(\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor\right) + 6n - 1, \text{ para todo } n > 1,$

(b) $f(n) = 2f\left(\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor\right) + 3n + 2, \text{ para todo } n > 1,$

(c) $f(n) = 6f\left(\left\lfloor \dfrac{n}{6} \right\rfloor\right) + 2n + 3, \text{ para todo } n > 1,$

(d) $f(n) = 6f\left(\left\lfloor \dfrac{n}{6} \right\rfloor\right) + 3n - 1, \text{ para todo } n > 1,$

(e) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \dfrac{n}{3} \right\rfloor\right) + 2n - 1, \text{ para todo } n > 1,$

(f) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \dfrac{n}{3} \right\rfloor\right) + 3n - 5, \text{ para todo } n > 1,$

(g) $f(n) = 3f\left(\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor\right) + n^2 - n, \text{ para todo } n > 1,$

(h) $f(n) = 3f\left(\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor\right) + n^2 - 2n + 1, \text{ para todo } n > 1,$

(i) $f(n) = 3f\left(\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor\right) + n - 2, \text{ para todo } n > 1,$

(j) $f(n) = 3f\left(\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor\right) + 5n - 7, \text{ para todo } n > 1,$

(k) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \dfrac{n}{3} \right\rfloor\right) + n^2, \text{ para todo } n > 1,$

(l) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + n^2 - 7n + 5,$ para todo $n > 1,$

(m) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1,$ para todo $n > 3,$

(n) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + n^2 - 3n + 2,$ para todo $n > 1,$

(o) $f(n) = 2f\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + n - 3,$ para todo $n > 1,$

(p) $f(n) = 6f\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + n^2 - 2n + 1,$ para todo $n > 1,$

(q) $f(n) = 2f\left(\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor\right) + n - 1,$ para todo $n > 1,$

(r) $f(n) = f\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + 1,$ para todo $n > 1,$

(s) $f(n) = 2f\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + 1,$ para todo $n > 1,$

(t) $f(n) = f\left(\left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil\right) + k,$ para todo $n > 1$ e para todo $k \in \mathbb{N},$

104*. Resolva as seguintes recorrências.

(a) $f(n) = f(n-1) + n,$ para todo $n > 0.$

(b) $f(n) = 2f(n-1) + 1,$ para todo $n > 0$

(c) $f(n) = 2f(n-1) + n^2,$ para todo $n \geq 1$

(d) $f(n) = 2f(n-1) + n,$ para todo $n > 1,$

(e) $f(n) = 3f(n-1) + 2,$ para todo $n > 1,$

(f) $f(n) = 3f(n-1) - 15,$ para todo $n > 1,$

(g) $f(n) = f(n-1) + n - 1,$ para todo $n > 1,$

(h) $f(n) = f(n-1) + 2n - 3,$ para todo $n > 1,$

(i) $f(n) = 2f(n-1) + n - 1,$ para todo $n > 1,$

(j) $f(n) = 2f(n-1) + 3n + 1,$ para todo $n > 1,$

(k) $f(n) = 2f(n-1) + n^2,$ para todo $n > 1,$

(l) $f(n) = f(n-2) + 3n + 4,$ para todo $n > 1,$

(m) $f(n) = f(n-2) + n,$ para todo $n > 1,$

(n) $f(n) = f(n-3) + 5n - 9,$ para todo $n > 3,$

(o) $f(n) = 2f(n-1) + n^2 - 2n + 1,$ para todo $n > 1,$

(p) $f(n) = 3f(n-1) + n, \text{ para todo } n \geq 1.$

(q) $f(n) = 3f(n-2) + n^2, \text{ para todo } n \geq 2.$

(r) $f(n) = 2f(n-2) + 2n - 2, \text{ para todo } n \geq 2.$

(s) $f(n) = 2f(n-3) + 3n - 2, \text{ para todo } n \geq 3.$

(t) $f(n) = 3f(n-3) + 3n - 3, \text{ para todo } n \geq 3.$

105*. Seja $f(n)$ o número de sequências binárias de comprimento n.

(a) Descreva $f(n)$ como uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

106*. Uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ é uma *progressão aritmética* se existe $r \in \mathbb{C}$ tal que

$$f(n+1) - f(n) = r \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Expresse a função f como acima por meio de uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência, obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão aritmética.

107*. Seja $m(n,k)$ o número de multiplicações/divisões efetuadas na execução de $B(n,k)$, o algoritmo do Exercício 88.

(a) Formule uma recorrência para $m(n,k)$ $(0 \leq k \leq n)$.

(b) Resolva esta recorrência.

108. Resolva a recorrência do Exercício 87.

109@. Dado $q \in \mathbb{C}$, uma *progressão geométrica* de razão q é uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = q, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

110[@]. Resolva as seguintes recorrências

(a)
$$f(n) = \begin{cases} n-1, & \text{se } 2 \le n \le 3, \\ 2f(n-1), & \text{se } n \ge 4. \end{cases}$$

(b)
$$f(n) = \begin{cases} n-1, & \text{se } 2 \le n \le 3, \\ 2f(n-2), & \text{se } n \ge 4. \end{cases}$$

111*. O seguinte algoritmo resolve o conhecido quebra-cabeça das Torres de Hanói. A execução de Hanoi(n, a, b, c) move n discos da torre a para a torre b usando a torre c como torre auxiliar, de acordo com as regras do jogo.

```
Hanoi(n, a, b, c)
  Se n = 0
      Termine
  Hanoi(n − 1, a, c, b)
  mova o disco no topo da torre a para o topo da torre b
  Hanoi(n − 1, c, b, a)
```

Seja $M(n)$ o número de movimentos (passagem de um disco de uma torre para outra) na execução de Hanoi(n, a, b, c).

(a) Descreva $M(n)$ por meio de uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

112*. Resolva as seguintes recorrências.

(a) $f(n) = nf(n-1) + n,$ para todo $n > 1$,

(b) $f(n) = f\left(\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor\right) + n^2,$ para todo $n > 1$,

(c) $f(n) = 2f\left(\left\lfloor \sqrt[3]{n} \right\rfloor\right) + n,$ para todo $n > 1$.

113[@]. O número de comparações no pior caso de uma execução do algoritmo MergeSort para um vetor de n elementos é dado pela recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1, & \text{se } n \ge 2. \end{cases}$$

Do Exercício 56 temos que $T^-(n) \leq T(n) \leq T^+(n)$, onde

$$T^-(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ 2T^-\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

e

$$T^+(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ 2T^+\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(a) Resolva as recorrências de $T^-(n)$ e $T^+(n)$.

(b) Use as soluções obtidas e o Exercício 41 para concluir que $T(n) \approx n \lg n$.

114[@]. O "Master Method" ou "Master Theorem"[12] é um método para obtenção de soluções assintóticas para recorrências que surgem naturalmente na análise de "algoritmos de divisão e conquista".

Tais recorrências tem a forma geral

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

onde $a \geq 1$ e $b \geq 1$, a expressão n/b pode significar tanto $\lfloor n/b \rfloor$ como $\lceil n/b \rceil$ e $f()$ é uma função genérica. A recorrência do Exercício 113 é um exemplo de caso particular desta recorrência.

Sejam a, b e $f()$ como acima e sejam $n_0 \in \mathbb{N}$ e $T^+, T^- \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} T^-(n) &= aT^-(\lfloor n/b \rfloor) + f(n), \\ T^+(n) &= aT^+(\lceil n/b \rceil) + f(n), \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$.

Resolva estas recorrências.

A.6.2 Recorrências Lineares Homogêneas

115[⋆]. Resolva as seguintes recorrências.

(a)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ 5f(n-1) - 6f(n-2), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

[12]Popularizado com este nome por Cormen, Leiserson, Rivest, and Stein (2009).

(b)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \textsf{se } n \leq 1, \\ 4f(n-1) + 3f(n-2), & \textsf{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(c)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \textsf{se } n = 0 \\ 2^n, & \textsf{se } n = 1 \textsf{ ou } n = 2 \\ 6f(n-1) - 11f(n-2) + 6f(n-3), & \textsf{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(d)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \textsf{se } n \leq 1, \\ 2f(n-1) - f(n-2), & \textsf{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(e)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \textsf{se } n < 1, \\ 1, & \textsf{se } 1 \leq n \leq 2, \\ 8f(n-1) - 19f(n-2) + 12f(n-3), & \textsf{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(f)

$$f(n) = \begin{cases} 2^n, & \textsf{se } n \leq 2, \\ \frac{7}{2}f(n-1) - \frac{7}{2}f(n-2) + 1f(n-3), & \textsf{se } n \geq 3. \end{cases}$$

116^-. Seja $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ o conjunto das funções $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Dados $f, g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ e $z \in \mathbb{C}$, definimos $f + g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ e $zf \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ como as funções dadas por

$$\begin{aligned} (f+g)(n) &= f(n) + g(n), \\ (zf)(n) &= zf(n). \end{aligned}$$

(a) Prove que $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ é um grupo comutativo.

(b) Prove que $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

117^-. Sejam $r_1, r_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$. Prove que as funções $f_1, f_2 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ dadas por

$$\begin{aligned} f_1(n) &= r_1^n, \\ f_2(n) &= r_2^n, \end{aligned}$$

são linearmente independentes em $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ se e somente se $r_1 \neq r_2$.

118^-. Sejam[13] $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$.

(a) Prove que se $g, h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazem a recorrência

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k,$$

então a função $g + h$ também satisfaz a mesma recorrência para todo $n \geq k$.

(b) Prove que se $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfaz a recorrência

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k,$$

então para todo $z \in \mathbb{C}$, a função zf também satisfaz a mesma recorrência para todo $n \geq k$.

(c) Prove que o conjunto das funções $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ que satisfazem a recorrência

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k,$$

é um subespaço vetorial de $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$.

$119^@$. Resolva as seguintes recorrências.

(a)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 2 \\ 5f(n-1) - 7f(n-2) + 3f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(b)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 9, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 9f(n-1) - 27f(n-2) + 27f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(c)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1 \\ 3, & \text{se } n = 2 \\ 7f(n-1) - 16f(n-2) + 12f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

[13] Este exercício usa a notação do Exercício 116

120*. Resolva as seguintes recorrências.

(a)

$$f(n) = \begin{cases} 3, & \text{se } n \leq 1, \\ 7, & \text{se } n = 2, \\ 3f(n-1) - f(n-2) + 3f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(b)

$$2f(n) = 3f(n-1) - 3f(n-2) + f(n-3), \text{ para todo } n \geq 3,$$

com

$$f(n) = n, \text{ para todo } n < 3.$$

(c)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 4, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2, \\ 6f(n-1) - 12f(n-2) + 8f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(d)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ \sqrt{5} + 2^n, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 3f(n-1) - f(n-2) - 2f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(e)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0 \\ 3^n, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 10f(n-1) - 31f(n-2) + 30f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(f)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 2 \\ 8f(n-1) - 21f(n-2) + 18f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(g)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0, \\ 2, & \text{se } n = 1, \\ 2f(n-1) + 4f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(h)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ f(n-1) - f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(i)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 1 \\ 4f(n-1) - 4f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(j)

$$f(n) = \begin{cases} 4n, & \text{se } n < 2, \\ 4f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(k)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 6, & \text{se } n = 1 \\ 6f(n-1) - 9f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(l)

$$f(n) = \begin{cases} 2n, & \text{se } n < 2, \\ f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

121⋆. Resolva as seguintes recorrências.

(a) [14]

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ nf(n-1) + n(n-1)f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(b) [15]

$$f(n) = \begin{cases} n+1, & \text{se } n \leq 1, \\ \sqrt{f(n-1)f(n-2)}, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

[14]**Sugestão:** Considere a função

$$g(n) = \frac{f(n)}{n!}.$$

[15]**Sugestão:** Considere a função

$$g(n) = \lg f(n).$$

(c) [16]

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ \sqrt{1 + f(n-1)^2}, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

(d) [17]

$$f(n) = \begin{cases} n + 1, & \text{se } n \leq 1, \\ f(n-1)f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

122*. Resolva a recorrência

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 4, \\ 7f(n-1) - 19f(n-2) + 25f(n-3) - 16f(n-4) + 4f(n-5), & \text{se } n > 4. \end{cases}$$

A.6.3 Recorrências Lineares não Homogêneas

123$^{@}$. Resolva as seguintes recorrências.

(a)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f(n-1) + 1, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

(b)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ 2f(n-1) + 1, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

(c)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f(n-1) + n, & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

[16]**Sugestão:** Considere a função

$$g(n) = f(n)^2.$$

[17]**Sugestão:** Considere a função

$$g(n) = \lg f(n).$$

(d)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 1, \\ 2f(n-1) + n, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

(e)

$$f(n) = 2f(n-1) + n^2, \text{ para todo } n \geq 1$$

(f)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 1, \\ 3f(n-2) + \frac{1}{3^n}, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

(g)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 1, \\ 2f(n-2) + \frac{1}{2^n}, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

(h)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 1 \\ 2f(n-1) + 2n - 1, & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

(i)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 1 \\ f(n-1) + 2n - 1, & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

(j)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 1 \\ 2f(n-1) + n^2 + n, & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

(k)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ f(n-1) + f(n-2) + 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(l)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 7f(n-1) - 12f(n-2) + 2n, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(m)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 5f(n-1) - 6f(n-2) + n.3^n, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(n)

$$f(n) = \begin{cases} 5n, & \text{se } n < 2, \\ 7f(n-1) - 10f(n-2) + n.5^n, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(o)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 7f(n-1) - 10f(n-2) + n.5^n, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(p)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 5f(n-1) - 6f(n-2) + n.5^n, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(q)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 7f(n-1) - 10f(n-2) + n.3^n, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(r)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 8f(n-1) - 15f(n-2) + n.2^n, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(s)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ f(n-1) + f(n-2) + 6n + 3, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(t)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 5f(n-1) - 4f(n-2) + 2n.5^n + 2, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(u) Resolva a seguinte recorrência.

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 2, \\ 5f(n-1) - 6f(n-2) + 2^n, & \text{se } n > 2. \end{cases}$$

(v) Resolva a seguinte recorrência.

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ 7f(n-1) - 12f(n-2) + 3^n, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

124*. O **"Triângulo de Cantor"**, (batizado em homenagem ao Georg Cantor), é uma "tabela infinita" triangular em que cada par $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ ocupa uma posição de maneira que, para todo $n \in \mathbb{N}$, a n-ésima linha do triângulo é formada por todos os pares $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ satisfazendo $i + j = n$.

As linhas, colunas e posições começam a contar a partir de 0, de cima para baixo e da esquerda para direita. Assim, por exemplo, $(0, 0)$ ocupa a posição 0 (linha 0, coluna 0); $(0, 1)$ ocupa a posição 1 (linha 1, coluna 0); $(1, 0)$ ocupa a posição 2 (linha 1, coluna 1); $(0, 2)$ ocupa a posição 3 (linha 2, coluna 0) e assim por diante. As 7 primeiras linhas do Triângulo de Cantor são

$$\begin{array}{lllllll}
(0,0) & & & & & & \\
(0,1) & (1,0) & & & & & \\
(0,2) & (1,1) & (2,0) & & & & \\
(0,3) & (1,2) & (2,1) & (3,0) & & & \\
(0,4) & (1,3) & (2,2) & (3,1) & (4,0) & & \\
(0,5) & (1,4) & (2,3) & (3,2) & (4,1) & (5,0) & \\
(0,6) & (1,5) & (2,4) & (3,3) & (4,2) & (5,1) & (6,0)
\end{array}$$

(a) Seja $l(n)$ o número de pares na n-ésima linha do Triângulo de Cantor

  i. Descreva $l(n)$ como uma recorrência.

  ii. Resolva essa recorrência.

(b) Seja $t(n)$ o número de pares no Triângulo de Cantor até a n-ésima

  i. Descreva $t(n)$ como uma recorrência.

  ii. Resolva essa recorrência.

(c) Seja $p(i, j)$ a posição ocupada pelo par (i, j) no Triângulo de Cantor. Dê uma expressão não recorrente para $p(i, j)$.

125*. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $S(n)$ o número de somas efetuado na execução de $\mathsf{F}(n)$, o algoritmo do Exercício 84.

(a) Expresse $S(n)$ por uma recorrência.

(b) Resolva essa recorrência.

126*. Para todo $n \geq 0$, um n-cubo é um diagrama composto por pontos e linhas que ligam pares de pontos entre si. O 0-cubo tem um ponto e nenhuma linha. Para todo $n > 0$, o n-cubo é o diagrama obtido desenhando-se lado a lado duas cópias do $(n-1)$-cubo e ligando cada ponto de uma das cópias ao seu correspondente na outra cópia por uma linha.

(a) Descreva o número de pontos de um n-cubo através de uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

(c) Descreva o número de linhas de um n-cubo através de uma recorrência.

(d) Resolva esta recorrência.

A.6.4 Somatórios

127@. Dado $q \in \mathbb{C} - \{0\}$, uma *progressão geométrica*[18] de razão q é uma função $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = q, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, a soma dos n termos iniciais de uma progressão geométrica é dada por

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i).$$

(a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência linear homogênea.

(b) Resolva esta recorrência, obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão geométrica.

(c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

[18] cfr. Exercício 109

128$^@$. Uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ é uma *progressão aritmética*[19] se existe $r \in \mathbb{C}$ tal que

$$f(i+1) - f(i) = r \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, a soma dos n termos iniciais de uma progressão aritmética é dada por

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i).$$

(a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência linear não homogênea.

(b) Resolva esta recorrência, obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão aritmética.

(c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

129$^@$. Dê uma expressão livre de somatórios para $\sum_{i=0}^{n} i$.

130$^@$. Dê uma expressão[20] livre de somatórios para $\sum_{i=0}^{n} i2^i$.

131*. Calcule o valor dos seguintes somatórios.

(a)
$$\sum_{i=0}^{n} i^2.$$

(b)
$$\sum_{i=0}^{n} i^3.$$

(c)
$$\sum_{i=0}^{n} i(i-1).$$

[19] cfr. Exercício 106

[20] cfr. Exercício 47

(d)

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{i}{2^i}.$$

(e)

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 3^i.$$

(f)

$$\sum_{i=0}^{n} i256^i.$$

(g)

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{i^2}{5^i}.$$

(h)

$$\sum_{i=0}^{n} i2^{i-1}.$$

(i)

$$\sum_{i=0}^{n} i^2(i-1).$$

(j)

$$\sum_{i=0}^{n} i(2^i - i).$$

132⋆. A *média*[21] do número de comparações efetuadas na execução do algoritmo de busca binária em um vetor de n posições é dada por[22]

$$\begin{aligned}\mu(n) = 1 \times \frac{1}{n} + 2 \times \frac{2}{n} + 3 \times \frac{4}{n} + 4 \times \frac{8}{n} + \ldots \\ + \lfloor \lg n \rfloor \times \frac{2^{\lfloor \lg n \rfloor - 1}}{n} \\ + (\lfloor \lg n \rfloor + 1) \times \frac{(n - \sum_{i=1}^{\lfloor \lg n \rfloor} 2^{i-1})}{n}\end{aligned}$$

[21]Também chamada *número esperado* ou *esperança*.

[22]Assume-se aqui que a busca por qualquer dos n elementos do vetor é equiprovável e bem-sucedida.

(a) Dê uma expressão livre de somatórios[23] para $\mu(n)$.

(b) Conclua do item anterior que $\mu(n) \approx \lfloor \lg n \rfloor$.

133*. Dê uma expressão livre de somatórios para

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} F(i),$$

onde $F(n)$ é a sequência de Fibonacci[24].

A.6.5 Algumas Aplicações

134$^@$. Em muitas situações de cálculo numérico trabalha-se com matrizes triangulares inferiores, isto é, matrizes quadradas cujos elementos acima da diagonal principal são todos nulos. Nesses casos é comum representar uma matriz triangular inferior de n linhas por um vetor contendo somente as posições não-nulas da matriz, o que resulta numa economia de espaço de quase 50%.

Suponha que a matriz triangular inferior M, de n linhas indexadas de 1 a n, será representada por um vetor $v[0..N(n) - 1]$, onde $N(n)$ é o tamanho do vetor necessário para representar uma matriz triangular inferior de n linhas.

(a) Descreva $N(n)$ através de uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

(c) Qual o índice de v que corresponde à posição $M[i, j]$?

135$^@$. Uma *árvore binária* T é uma *árvore vazia*, denotada por λ ou é um par $(E(T), D(T))$ onde $E(T)$ e $D(T)$ são árvores binárias, chamadas respectivamente de *subárvore esquerda* e *subárvore direita* de T. Vamos denotar por $\mathcal{B}$ o conjunto das árvores binárias.

O *tamanho* de uma árvore T é dado por

$$|T| = \begin{cases} 0, & \text{se } T = \lambda, \\ |E(T)| + |D(T)| + 1, & \text{caso contrário .} \end{cases}$$

[23]**Sugestão:** use os resultados dos Exercícios 46 e 47

[24]Veja o Exercício 52.

A árvore de tamanho um é chamada de *árvore trivial*.

A *altura* de uma árvore T é dada por

$$h(T) = \begin{cases} 0, & \textsf{se } T = \lambda, \\ \max\{h(E(T)), h(D(T))\} + 1, & \textsf{se } T \neq \lambda. \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $h^+(n)$ a maior altura possível de uma árvore binária de tamanho n.

(a) Expresse $h^+(n)$ como uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

136$^{@}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $t^+(n)$ o maior tamanho possível de uma árvore binária[25] de altura n.

(a) Expresse $t^+(n)$ como uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

137$^{@}$. Seja AVL o conjunto das árvores binárias[26] T satisfazendo

$$\lambda \in \textsf{AVL e } E(T) \in \textsf{AVL e } D(T) \in \textsf{AVL}.$$

e

$$|h(E(T)) - h(D(T))| \leq 1.$$

Seja $t^-(n)$ o menor tamanho possível de uma árvore AVL de altura n.

(a) Expresse $t^-(n)$ como uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

138$^{@}$. Resolva a seguinte recorrência que expressa o número médio de comparações na execução do algoritmo QuickSort.

$$C(n) = \begin{cases} 0, & \textsf{se } n < 2, \\ \frac{(n+1)}{n}C(n-1) + \frac{2(n-1)}{n}, & \textsf{se } n \geq 2. \end{cases}$$

[25] Veja o Exercício 135.

[26] Veja o Exercício 135.

A.7 Fundamentos de Contagem

139. Em se tratando de contagem, é interessante ter uma noção intuitiva de grandezas e das relações entre elas. No contexto das ciências exatas em geral, é usual expressar grandezas como potências de 10. No contexto da Ciência da Computação, entretanto, é mais natural expressar grandezas como potências de 2. Nas questões abaixo, n representa uma quantidade e o exercício consiste em determinar os valores de k e d para os quais

$$10^d \leq n < 10^{d+1},$$
$$2^k \leq n < 2^{k+1}.$$

(a) Tempo, em segundos[27]:

i. $n =$ uma hora.

ii. $n =$ um dia.

iii. $n =$ uma semana.

iv. $n =$ um mês.

v. $n =$ um ano.

vi. $n =$ sua idade.

vii. $n =$ tempo decorrido desde as 00h00:00 de 1 de janeiro de 1970[28].

viii. $n =$ um século.

ix. $n =$ um milênio.

x. $n =$ um milhão de anos.

xi. $n =$ idade estimada da Terra[29].

xii. $n =$ idade estimada da Via Láctea[30].

xiii. $n =$ idade estimada do universo observável[31].

(b) Distância, em metros[32]:

i. $n =$ maior distância possível entre dois pontos na superfície da Terra[33].

[27] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Second
[28] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Date_(Unix)
[29] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth_Age
[30] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Milky_Way
[31] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Age_of_the_Universe
[32] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Metre
[33] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth

ii. n = distância da Terra ao Sol[34].

iii. n = um ano-luz.

iv. n = diâmetro estimado da Via Láctea[35].

(c) Velocidade, em metros por segundo:

i. n = de um homem.

ii. n = de um animal.

iii. n = de um veículo terrestre.

iv. n = de um veículo aquático.

v. n = de um veículo aéreo.

vi. n = da Terra em relação ao Sol[36].

vii. n = da luz[37].

(d) Massa, em gramas:

i. n = de um homem.

ii. n = de um carro.

iii. n = de um elefante adulto[38].

iv. n = de um Boeing-737.

v. n = água na Terra[39].

vi. n = da Terra[40].

vii. n = do Sol[41].

viii. n = da Via Láctea[42].

ix. n = da Lua[43].

x. n = do universo observável[44].

(e) Volume, em litros:

i. n = de um homem.

ii. n = de um carro.

---

[34] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth

[35] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Milky_Way

[36] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth

[37] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth

[38] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Elephant

[39] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Hydrosphere

[40] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth

[41] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Sun

[42] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Milky_Way

[43] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Moon

[44] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Mass_of_the_observable_universe

iii. $n =$ da água oceânica na Terra[45].
iv. $n =$ da Terra[46].
v. $n =$ da Lua[47].
vi. $n =$ do Sol[48].
vii. $n =$ do universo observável[49].

(f) Outras quantidades:
i. $n =$ população de Curitiba.
ii. $n =$ população do Paraná.
iii. $n =$ população do Brasil.
iv. $n =$ população da Terra.
v. $n =$ número de estrelas no universo observável[50].
vi. $n =$ número estimado de átomos no universo observável[51].
vii. $n =$ produto interno bruto brasileiro em reais.
viii. $n =$ dívida interna brasileira em reais.
ix. $n =$ número de células nervosas no corpo humano.

140^{-}. Prove que a composição de funções bijetoras é uma bijeção.

141^{-}. Prove que a relação $\sim$ sobre conjuntos finitos dada por

$$A \sim B := |A| = |B|,$$

é uma relação de equivalência.

$142^{\star}$. Qual o número de

(a) múltiplos positivos de 3 menores ou iguais a 100?
(b) múltiplos positivos de 4 menores ou iguais a 500?
(c) múltiplos positivos de n menores ou iguais a k?

[45] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Ocean
[46] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth
[47] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Moon
[48] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Sun
[49] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Observable_universe
[50] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Observable_universe
[51] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Observable_universe

A.8 União e Produto Cartesiano

143$^{\#}$. Sabendo que se A e B são conjuntos finitos, então

$$|A \times B| = |A||B|,$$

prove por indução em n que se $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos então,

$$\left|\prod_{i=1}^{n} A_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$

144$^{@}$. Quantos divisores naturais tem o número 72?

145*. Quantos divisores naturais tem o número 360?

146$^{\#}$. Prove que o número de divisores naturais de um inteiro $n \in \mathbb{N}$ é

$$\prod_{i=1}^{k} (m_i + 1),$$

onde

$$\prod_{i=1}^{k} p_i^{m_i},$$

é a decomposição de n em fatores primos.

147*.
(a) Dê uma expressão para o número de divisores ímpares de um número dado n.
(b) Dê uma expressão para o número de divisores pares de um número dado n.
(c) Generalize a resposta dos itens anteriores dando uma expressão para o número de divisores pares de um número dado n que são e que não são múltiplos de um primo p, também dado.

148*. Qual o número de inteiros positivos menores ou iguais a 1000 que são ímpares ou quadrados de inteiros?

Generalize a resposta dando uma expressão para o número de inteiros positivos menores ou iguais a n que são ímpares ou quadrados de inteiros. Explique o raciocínio que leva à resposta.

149*. Uma técnica de cálculo de números em ponto flutuante que permite um maior controle da propagação de erros de precisão é a chamada *aritmética intervalar*. Em vez de fazer os cálculos com números, usa-se intervalos fechados para os cálculos.

Por exemplo, em vez de computar $\pi + e$ e obter um valor aproximado do resultado, computa-se a soma $[3.140 \times 10^1, 3.141 \times 10^1] + [2.780 \times 10^1, 2.781 \times 10^1]$ de intervalos que contém os somandos e obtem-se como resultado o intervalo $[5.920 \times 10^1, 5.922 \times 10^1]$ que seguramente contém $\pi + e$. Com isso sabe-se que qualquer número neste intervalo difere de no máximo 10^{-3} de $\pi + e$, ou seja, o erro de aproximação é controlado.

Se a quantidade de números distintos representáveis em ponto flutuante é n, quantos intervalos diferentes é possível representar?

A.9 Sequências

150$^@$. Um "bit" é um elemento de $\{0, 1\}$.

Se um "byte" é uma sequência de 8 "bits", quantos valores diferentes pode assumir um "byte"?

151$^@$. Um teclado convencional tem 47 "teclas que geram caracteres". Cada tecla pode gerar dois caracteres, conforme combinada ou não com a tecla "shift". Chamaremos de *caracteres convencionais* os caracteres que podem ser gerados desta maneira.

Uma *senha convencional* é uma sequência de caracteres convencionais.

Considere um sistema de quebra de senhas à base de "força bruta", isto é, que tenta todas as senhas possíveis, e suponha que o sistema é capaz de testar 1 (uma) senha por segundo.

(a) Qual o menor tamanho n que deve ter uma senha convencional para garantir que tal sistema não seja capaz de testar todas as senhas possíveis em um dia?

(b) Se o sistema atacante for um milhão de vezes mais rápido, para quanto mudará este valor?

152$^@$. Qual o maior valor de n tal que é possível gravar em um dvd (4 700 372 992 bytes) todos os possíveis arquivos de tamanho até n?

153*. Quantos resultados possíveis existem para uma sequência de

(a) n lançamentos consecutivos de uma moeda?

(b) até n lançamentos consecutivos de uma moeda?

154*. Quantos resultados possíveis existem para uma sequência de

(a) n lançamentos consecutivos de um dado?

(b) até n lançamentos consecutivos de um dado?

155*. O Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa registra 228 500 verbetes utilizando o alfabeto de 26 letras. O mais longo deles tem 46 letras.

Supondo que todas as palavras de até 46 letras sejam equiprováveis, qual a probabilidade de uma palavra de até 46 letras escolhida uniformemente ao acaso estar registrada no Houaiss?

156*. Um *palíndromo* sobre um conjunto A é uma sequência $(a_1, \ldots, a_k)$ de elementos de A que "permanece a mesma quando lida na ordem reversa", isto é, que satisfaz

$$a_i = a_{k-i+1}, \text{ para todo } 1 \leq i \leq k.$$

(a) Enumere todos os palíndromos de tamanho 4 sobre $\{a, b, c\}$.

(b) Enumere todos os palíndromos de tamanho 5 sobre $\{a, b, c\}$.

(c) Qual o número de palíndromos de tamanho k sobre um conjunto de n elementos?

157*. Um protocolo de comunicação usa três tipos de pacotes de dados, T_1, T_2 e T_3, diferenciados por um campo inicial. Os pacotes do tipo T_1 tem, 4 bits de dados após o campo inicial (identificação do tipo); os pacotes do tipo T_2 tem 8 bits de dados; e os pacotes do tipo T_3 tem 10 bits de dados. Qual o número de pacotes distintos que existem neste protocolo?

158*. O endereço de um dispositivo na InterNet (endereço IP) é um número de 4 *bytes*.

(a) Qual o número de endereços IP possíveis?

(b) Dos endereços possíveis, as seguintes faixas de endereços são reservadas para redes locais:

- 10.0.0.0 a 10.255.255.255
- 172.16.0.0 a 172.31.255.255
- 192.168.0.0 a 192.168.255.255
- 169.254.0.0 a 169.254.255.255

Qual o número de endereços IP não-reservados na rede?

159*. Interfaces de rede recebem uma identificação do fabricante conhecida como *endereço MAC* que é um número de 48 bits[52]. Se a inclusão

[52] Atualmente é um número de 64 bits, o que já é usado por tecnologias como *FireWire*, *IPv6*, *802.15.4*).

digital for um sucesso absoluto, quantas intefaces de rede poderiam ser dadas a cada habitante do planeta?

160*. Em um jantar foram servidos 2 tipos de entrada (pães com patês e salada), 3 tipos de massa (espaguete, talharim e nhoque), 4 tipos de molho (bolonhesa, pesto, branco e funghi), e 2 tipos de sobremesa (sorvete e salada de frutas). Sabendo que nenhum convidado escolheu a mesma combinação, e que todos que escolheram a salada não escolheram nhoque, qual o número máximo de convidados?

161*. Uma *data* é uma sequência de 8 dígitos da forma $d_1d_2m_1m_2a_1a_2a_3a_4$, onde d_1d_2, m_1m_2 e $a_1a_2a_3a_4$ são dígitos representando o dia, mês e ano, respectivamente. Por exemplo, 25122012 e 14071889 são datas e 31022013 e 48151623 não são.

(a) Desconsiderando os anos bissextos, quantas das sequências de 8 dígitos são datas válidas?

(b) Qual a probabilidade de uma sequência de 8 dígitos escolhida uniformemente ao acaso ser uma data?

(c) Se um gerador aleatório gera uma sequência de 8 dígitos a cada segundo (independente e uniformemente), qual é a probabilidade de não ter gerado nenhuma data ao final de um minuto?

162*. A licença de um veículo no Brasil é uma cadeia composta por 3 letras seguida de 4 dígitos. Quantos veículos licenciados pode haver simultaneamente no Brasil? Compare com a resposta do exercício 139(f)iii.

163*. Os números de telefone no Brasil podem ser números de 8 dígitos, sendo que o primeiro não pode ser 0 ou de 9 dígitos, sendo o primeiro necessariamente um 9.

(a) Quantos números de telefone são possíveis no Brasil?

(b) Existem mais números de telefone ou licenças de veículo[53] possíveis?

164*. Um certo monitor de computador tem resolução de 640 por 480 *pixels* com resolução de cor de 32 bits (também conhecido como “truecolor”,

[53]Veja o Exercício 162

isto é, cada *pixel* pode assumir 2^{32} cores diferentes). Sua frequência de varredura (isto é, a frequência com que a imagem exibida pode ser modificada) é de 60 Hz. Quanto tempo, no mínimo, levaria o monitor[54] para exibir todas as imagens possíveis?

165*. O Secure Hash Algorithm 1 (SHA-1) é uma função de hashing que associa sequências de bytes de qualquer tamanho a sequências 160 bits.

Por exemplo, a imagem da sequência de bytes correspondente à cadeia "The quick brown fox jumps over the lazy dog" é a sequência de bits `2fd4e1c67a2d28fced849ee1bb76e7391b93eb12` em notação hexadecimal.

Um dos usos do SHA-1 é o de servir como uma espécie de "assinatura" de arquivos. Desde sua adoção em 1993 até 2017 não se conhecia nenhum exemplo de dois arquivos com o mesmo valor de SHA-1.

(a) Quanto espaço no mínimo seria necessário para armazenar um conjunto de arquivos que garantisse que ao menos dois deles tivessem o mesmo valor de SHA-1?

(b) Supondo que estes arquivos estivessem disponíveis e que o tempo necessário para computar o valor de SHA-1 de um arquivo de n bytes seja $c_1 n$ e que o tempo necessário para comparar dois valores de SHA-1 seja c_2 (c_1 e c_2 são constantes medidas em "ciclos de processador"), qual o tempo necessário para garantidamente identificar dois arquivos deste conjunto com o mesmo valor de SHA-1?

(c) Se a frequência do processador é de f Hz, quanto tempo seria necessário para garantidamente identificar dois arquivos deste conjunto com o mesmo valor de SHA-1?

[54] Estes parâmetros são mais ou menos os mesmos em se tratando de um televisor convencional.

A.10 Funções

166#. Deduza que existem n^k funções $[k] \to [n]$ através dos seguintes passos.

(a) Defina $f(k, n) :=$ número de funções $[k] \to [n]$.

(b) Observe que cada função $f\colon [k] \to [n]$ corresponde a um par (x, g) onde $x \in [n]$ corresponde à imagem de k por f e $g\colon [k-1] \to [n]$ corresponde às imagens de $1, \ldots k-1$ por f.

(c) Use esta observação para descrever $f(k, n)$ por meio de uma recorrência.

(d) Resolva esta recorrência.

167@. Quantos circuitos combinacionais funcionalmente distintos com e entradas e s saídas são possíveis?

168@. De quantas maneiras distintas podem acontecer os aniversários de um grupo de n pessoas?

169⋆. As letras do código MORSE são formadas por uma sequência de traços (_) e pontos (.), sendo permitidas repetições. Observe alguns exemplos utilizando quantidades distintas de símbolos:

- 3 símbolos: (_ , . , _)
- 4 símbolos: (. , . , _ , .)
- 5 símbolos: (_ , _ , . , _ , .)

Nessas condições, determine quantas letras poderiam ser representadas utilizando-se, no máximo, 8 símbolos?

170⋆. (VUNESP-04) Um certo tipo de código usa apenas dois símbolos, o número zero (0) e o número (1) e, considerando esses símbolos como letras, podem-se formar palavras. Por exemplo: 0, 01, 00, 001 e 110 são algumas palavras de uma, duas e três letras desse código. O número máximo de palavras com cinco letras ou menos, que podem ser formadas com esse código é:

171@. Muitos problemas de importantes otimização podem ser formulados como segue.

São dados um conjunto finito A e uma função $v\colon 2^A \to \mathbb{Q}$ que associa a cada subconjunto S de A um *valor* numérico $v(S)$. O objetivo é determinar um subconjunto A de valor mínimo, isto é, um conjunto $S \subseteq A$ tal que

$$v(S) \leq v(S'), \text{ para todo } S' \subseteq A.$$

Um algoritmo de busca exaustiva (também chamado de algoritmo de força bruta) para um problema assim é um algoritmo que computa $v(S)$ para cada subconjunto $S \subseteq A$ e devolve um subconjunto de valor mínimo.

Nesse contexto, considere um algoritmo de busca exaustiva que consegue computar um novo conjunto $S \subseteq A$ e o valor de $v(S)$ por segundo.

(a) Qual o maior tamanho de A para o qual o programa consegue resolver o problema em 1 dia?

(b) Se em vez de 1 conjunto por segundo o algoritmo fosse capaz de analizar 1 conjunto por ciclo de máquina, num processador de $4GHz$?

(c) E se, nas condi/ões do item anterior, estivéssemos dispostos a esperar um ano?

A.10.1 Funções Injetoras (Arranjos)

172⋆. (VITA-SP) Considere os números de dois a seis algarismos distintos formados utilizando-se apenas 1, 2, 4, 5, 7 e 8. Quantos desses números são ímpares e começam com um dígito par?

173⋆. (VUDESC) O número de anagramas de quatro letras, começando com a letra **G** que pode ser formado com a palavra PORTUGAL é:

174⋆. (VUFPR) Dentre todos os números de quatro algarismos distintos formados com algarismo pertencentes ao conjunto {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, quantos são divisíveis por 2?

175*. (UFCE) Qual é a quantidade de números inteiros formados por três algarismos distintos, escolhidos dentre 1, 3, 5, 7 e 9 e que são maiores que 200 e menores que 800.

A.10.2 Funções Bijetoras (Permutações)

176$^@$. Colocando todos os números obtidos pelas permutações dos dígitos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ em ordem crescente, qual o lugar ocupado pelo número 43 521?

177*. Um clube resolve fazer uma Semana de Cinema. Para isso, os organizadores escolhem sete filmes, que serão exibidos um por dia. Porém, ao elaborar a programação, eles decidem que três desses filmes, que são de ficção científica, devem ser exibidos em dias consecutivos. Qual o número de maneiras diferentes que se pode fazer a programação.

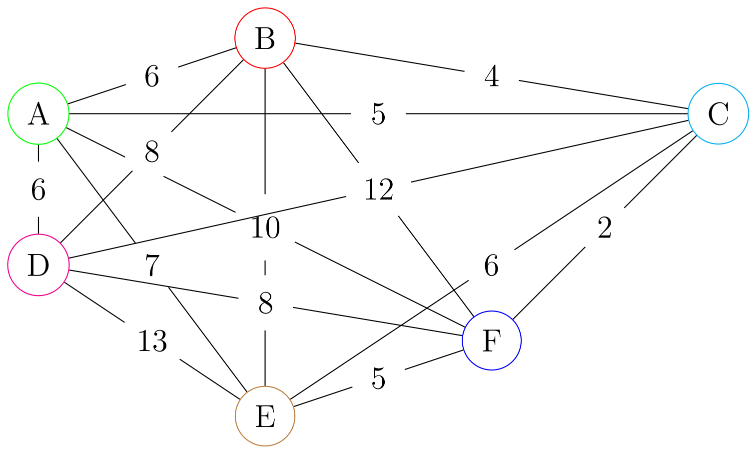
178*. Sobre uma mesa estão dispostos livros distintos, sendo 4 de algoritmos, 2 de arquitetura e 5 de cálculo. De quantas maneiras os livros podem ser empilhados sobre a mesa de tal forma que aqueles que tratam do mesmo assunto estejam juntos?

179*. A seguinte afirmação é verdadeira? Justifique.

> A probabilidade de obter uma permutação das cartas que nunca aconteceu antes ao embaralhar um baralho comum é maior que 50%.

180$^@$. Dois meninos e três meninas formarão uma roda dando-se as mãos. De quantos modos diferentes poderão formar a roda de modo que os dois meninos não fiquem juntos?

181*. (ENEM) João mora na cidade **A** e precisa visitar cinco clientes, localizados em cidades diferentes da sua, conforme ilustra a figura abaixo. Cada trajeto possível pode ser representado por uma sequência de 7 letras. Por exemplo, o trajeto **ABCDEFA**, informa que ele sairá da cidade **A**, visitante as cidades **B**, **C**, **D**, **E** e **F** nesta ordem, voltando para a cidade **A**. Além disso, o número indicado entre as letras informa o custo do deslocamente entre as cidades.



Como João quer economizar, ele precisa determinar qual o trajeto de menor custo para visitar os cinco clientes. Examinando a figura, percebe que precisa considerar somente parte das sequências, pois os trajetos **ABCDEFA** e **AFEDCBA** tem o mesmo custo. Ele gasta 1mim20s para examinar uma sequência e descartar sua simétrica, conforme apresentado. O tempo mínimo necessário para João verificar todas as sequências possíveis no problema é de

182⋆. Uma família é composta por seis pessoas: o pai, a mãe e quatro filhos. Num restaurante, essa família vai ocupar uma mesa redonda. Em quantas disposições diferentres essas pessoas podem se sentar em torno da mesa de modo que o pai e a mãe fiquem juntos?

183⋆. (VUFU-MG (1996)) Quer-se colocar as bandeiras de oito países em uma praça de forma octagonal, de modo que as bandeiras fiquem nos vértices do octógono e que as bandeiras de Brasil e Portugal ocupem vértices consecutivos. Pode-se fazer isso de quantas maneiras?

A.11 Subconjuntos

184[@]. A mega–sena é uma loteria onde são sorteados 6 dentre os números de 1 a 60, sendo todos os resultados possíveis equiprováveis.

Para cada $k \geq 6$, uma *k-aposta* é uma escolha de k dentre os números de 1 a 60. Ganha-se a loteria com uma k–aposta se 6 dentre os k números que compõem esta k–aposta são os sorteados. Uma *aposta simples* é uma 6-aposta.

(a) Quantos são os resultados possíveis de um sorteio da mega-sena?

(b) Qual a chance de ganhar a mega-sena com uma aposta simples?

(c) Quantas vezes maior a chance de ganhar a mega-sena com uma 7–aposta, comparada com a chance de ganhar com uma aposta simples?

(d) Em geral, quantas vezes maior a chance de ganhar a mega-sena com uma k–aposta, comparada com a chance de ganhar com uma aposta simples?

185[⋆]. O sorteio 2052 da mega-sena (23 de junho de 2018) ficou famoso porque pela primeira vez na história da loteria, todos os seis números sorteados (50, 51, 56, 57, 58 e 59) pertenciam à mesma dezena.

Considerando todos os sorteios equiprováveis, qual a probabilidade de um sorteio da mega-sena (seis números entre 1 e 60) pertencerem à mesma dezena?

186[#]. Seja A um conjunto finito e seja $k \in \mathbb{N}$. Prove que

$$\binom{A}{k} \sim \binom{A}{|A|-k}.$$

187[⋆]. Numa formatura de 55 alunos de Ciência da Computação, cada aluno cumprimentou cada um de seus colegas exatamente uma vez, parabenizando-o por ter se formado. Quantos cumprimentos foram trocados?

$188^{\#}$. Prove[55] que

$$\binom{[n]}{k} \sim \binom{[n]}{n-k},$$

para todo $n, k \in \mathbb{N}$.

$189^{\#}$. Quantas são as sequências binárias de n dígitos com

- exatamente k dígitos 1s?
- pelo menos k dígitos 1s?
- no máximo k dígitos 1s?

$190^{\star}$. Numa sala[56] há 5 lugares e 7 pessoas. De quantas modos diferentes essas pessoas podem ocupar a sala, sendo que até 5 podem ficar sentadas e o resto em pé se

(a) as cadeiras são idênticas?

(b) as cadeiras são distintas?

$191^{\star}$. De quantas maneiras[57] podem ser escolhidos 3 números naturais distintos de 1 a 30 de modo que sua soma seja par?

$192^{\star}$. Ao final de um campeonato de futebol[58], somaram-se as pontuações das equipes, obtendo-se um total de 35 pontos. Cada equipe jogou com todos os adversários apenas uma vez. Determine quantos empates houve no campeonato, sabendo que cada vitória valia 3 pontos, cada empate valia 1 ponto e que derrotas não pontuavam.

$193^{\#}$. Prove que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n,$$

usando resultados de contagem.

[55]**Sugestão:** use o Exercício 186

[56]Questão de vestibular da PUC-SP; contribuição de Gabriel Gugik

[57]Questão de vestibular da UNICAMP; contribuição de Gabriel Gugik

[58]Questão de vestibular da IME (2004); contribuição de Gabriel Gugik

194*. Considere um baralho de 52 cartas divididas igualmente entre os 4 naipes (ouros, espadas, copas e paus).

(a) Qual é a probabilidade de, numa mão de 10 cartas, exatamente 2 delas serem de espadas?

(b) Dentre todas as $\binom{52}{8}$ mãos possíveis de 8 cartas, quantas delas têm exatamente 2 cartas de cada naipe?

195*. Uma urna contém a bolas azuis e v bolas vermelhas todas distintas entre si. De quantas maneiras é possível retirar desta urna uma amostra de n bolas com exatamente k bolas azuis?

196*. Dado $n \in \mathbb{N}$, um *grafo de n vértices* é um conjunto $G \subseteq \binom{[n]}{2}$. Cada elemento de $[n]$ é chamado de *vértice* de G e cada $\{u, v\} \in G$ é chamado de *aresta* de G. Em cada item, explique o raciocínio que leva à resposta.

(a) Quantos diferentes grafos de n vértices existem?

(b) Quantos diferentes grafos de n vértices com m arestas existem?

(c) Uma *descrição* de um grafo G é uma sequência de $2|G| + 1$ inteiros. O primeiro inteiro é o número de vértices de G. Cada um dos $|G|$ pares de inteiros seguintes representa uma aresta de G. Por exemplo as sequências $(3, 1, 2, 2, 3)$, $(3, 2, 1, 2, 3)$ e $(3, 2, 3, 1, 2)$ são três descrições diferentes do grafo $G = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ de 3 vértices. Quantas descrições diferentes tem um mesmo grafo G de n vértices e m arestas?

A.12 Composições

197*. Quantas composições admite um inteiro n?

198*. De quantas maneiras é possível distribuir k bolas idênticas por n urnas distintas, de maneira que cada urna tenha pelo menos m bolas?

199*. De quantas maneiras é possível distribuir k bolas idênticas por n urnas distintas, de maneira que cada urna u tenha pelo menos $m(u)$ bolas?

200*. Quantas composições fracas com até n parcelas admite um inteiro n?

201$^\#$. Em função dos valores de k e n, quantas soluções inteiras não negativas (ou seja, $x_i \geq 0$, para todo $i \in [k]$) distintas admitem as seguintes equações.

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i = n$.

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i \leq n$.

202. No jogo Defense of the Ancients (DotA) o *herói* tem três diferentes tipos de *orbs*. Cada combinação de três *orbs*, quaisquer que sejam seus tipos, resulta numa *arma*.

(a) De quantas diferentes *armas* dispõe o *herói*?

(b) Responda à mesma pergunta para a versão generalizada onde existem k diferentes tipos de *orbs* e cada combinação de n *orbs* resulta numa *arma*.

A.13 Inclusão/Exclusão

203[@]. Quantos são os inteiros positivos menores ou iguais a 1000 que são divisíveis por 3 ou por 5 ou por 7?

Generalize o raciocínio dando uma expressão para o número de inteiros positivos menores ou iguais a n que são divisíveis por pelo menos um dentre $d_1, d_2, \dots, d_k$.

204*. Quantos são os inteiros positivos menores ou iguais a 2001 que são múltiplos de 3 ou 4 mas não são de 5?

205*. Quantos são os inteiros positivos menores ou iguais a 10 000 que são múltiplos de 4 ou 6 ou 10?

206*. Qual o número de soluções inteiras de[59]

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12, 0 \leq x_i \leq 5?$$

207#. Usando o princípio da Inclusão/Exclusão e o fato de que os números compostos (i.e., $a = b.c$, com $a, b, c \in \mathbb{N} - 1$ não é composto nem primo) menores ou iguais a n são divisíveis por algum número primo menor ou igual a k tal que $k = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, determine:

(a) O número de primos que são menores ou iguais a 111

(b) O número de primos menores ou iguais a n

208#. Em um jogo, um dado de 6 faces numeradas é jogado 5 vezes e o jogador ganha se o resultado da última jogada for igual ao de pelo menos uma das jogadas anteriores. Qual é a probabilidade de ganhar neste jogo?[60]

[59]**Sugestão:** Para cada $i \in [3]$, considere o conjunto

$$G_i := \{(x_1, x_2, x_3) \in S \mid x_i > 5\},$$

onde S é o conjunto das soluções inteiras não negativas de $x_1 + x_2 + x_3 = 12$.

[60]Extraído e adaptado de (Tuffley, 2009, ex. 4)

209#. Uma classe tem $2n$ estudantes agrupados em n duplas[61].

(a) Mostre que existem $(2n)!/(2^n n!)$ maneiras de agrupar os $2n$ estudantes em n duplas.

(b) Considere um agrupamento inicial dos $2n$ estudantes em n duplas. De quantas maneiras pode-se reagrupar os estudantes de forma que cada dupla esteja quebrada (ou seja, de forma que cada dupla seja diferente)?

210#. A *função tociente de Euler*[62] (ou *função ϕ de Euler*) é a função que, dado $n \in \mathbb{N}$ conta o número de inteiros positivos menores que n e sem divisores em comum com n, isto é

$$\phi(n) := |\{k \in [n] \mid \mathsf{mdc}(k, n) = 1\}|.$$

Por exemplo, $\phi(12) = 4$ pois há quatros inteiros positivos, 1, 5, 7 e 11 que são menores ou iguais a 12 e sem divisores em comum com 12. Convenciona-se que $\phi(1) = 1$.

Use o Princípio de Inclusão–Exclusão para verificar que

$$\phi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

onde $p_1, \ldots, p_k$ são os primos distintos que dividem n.

[63]: Se p é primo, então nenhum inteiro menor que p tem divisor em comum com p e, portanto, $\phi(p) = p - 1$. Se p é primo e $e \geq 1$, então $\phi(p^e)$ é o número de termos da sequência $(1, 2, 3, \ldots, p, p + 1, \ldots, 2p, \ldots, p^e)$ que não são divisíveis por p. Os números divisíveis por p nesta sequência são $p, 2p, 3p, \ldots, p^e$. Assim

$$\phi(p^e) = p^e - p^{e-1} = p^e \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

[61] Extraído e adaptado de (Tuffley, 2009, ex. 8)
[62] Extraído e adaptado de (Tuffley, 2009, ex. 9)
[63] **Sugestão:** Extraído de (Andreescu and Feng, 2004, p. 124, exemplo 6.6)

A.14 Pontos Fixos de Permutações e Desarranjos

211. (a) Qual o número de permutações sobre um conjunto de n elementos com exatamente um ponto fixo?

 (b) Qual o número de permutações sobre um conjunto finito de n elementos com exatamente k pontos fixos?

 (c) Qual o número de permutações sobre um conjunto finito de n elementos com pelo menos k pontos fixos?

 (d) Qual o número de permutações sobre um conjunto finito de n elementos com no máximo k pontos fixos?

 (e) Mostre que o número de permutações sem ponto fixo e o número de permutações com extamente um ponto fixo sobre um conjunto de n elementos difere de um para todo $n \in \mathbb{N}$[64].

212. De quantas maneiras podemos arranjar os inteiros $1, 2, 3, \ldots, 10$ de forma que nenhum dos cinco primeiros (i.e. 1,2,3,4,5) apareçam em suas posições naturais/originais[65]?

213. (a) Quantas permutações sobre $[n]$ existem de forma que i nunca é seguido de $i + 1$ para nenhum $1 \leq i < n$?[66]

 (b) Como essa resposta muda, se incluirmos a restrição de que n não pode ser seguido de 1?

214. Suponha que numa disciplina de pós-graduação, a avaliação final é realizada por meio da entrega de um relatório técnico, em forma de artigo científico, sobre um trabalho prático desenvolvido com os conhecimentos adquiridos ao longo da disciplina. O professor desta disciplina quer desenvolver em seus alunos/estudantes a capacidade de avaliação de artigos científicos e propõe que a avaliação dos relatórios seja feita pelos próprios alunos.

[64] Adaptado de (Andreescu and Feng, 2004, p. 140, ex. 6.3)

[65] Extraído de (Tuffley, 2009, ex. 4)

[66] Extraído e adaptado de (Tuffley, 2009, ex. 9)

Considerando que a turma é composta de apenas 5 alunos, de quantas maneiras distintas o professor pode distribuir os relatórios técnicos aos alunos de forma que um mesmo autor não avalie o seu artigo.

215. Para a palavra UFPR, podemos formar quantos anagramas de forma que cada letra não apareça em sua posição original.

216. Considere uma palavra formada por uma sequência de n letras A seguida de mais m letras B, quantos anagramas podemos formar dessa palavra de forma que nenhuma letra esteja em sua posição original.

Referências Bibliográficas

Titu Andreescu and Zuming Feng. *A Path to Combinatorics for Undergraduates: Counting Strategies*. Springer, 2004.

Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Introduction to Algorithms*. MIT Press, 3 edition, 2009. ISBN 978-0-262-03384-8. URL http://mitpress.mit.edu/catalog/item/default.asp?ttype=2&tid=11866.

Chris Tuffley. The principle of inclusion-exclusion, 2009. URL http://www.mathsolympiad.org.nz/wp-content/uploads/2009/02/inclusion-exclusion.pdf&ei=sj2DU73XL6m0sQTL24CwCQ&usg=AFQjCNEh4U_iyB_WDYPDzSAYj_3MFZrIIQ&sig2=9YLp0YGfZI4Mv8OQsoHNNA.