Matemática Discreta

Unidade 3: Conjuntos, Inteiros, Somatórios e Produtórios

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Conjuntos

Conjuntos

A, B: conjuntos

Conjuntos

A, B: conjuntos

Notação

$\emptyset$

Conjuntos

A, B: conjuntos

Notação

$\emptyset$ *denota o conjunto vazio.*

Conjuntos

A, B: conjuntos

Notação

$\emptyset$ *denota o conjunto vazio.*

$$a \in A \ :=$$

Conjuntos

A, B: conjuntos

Notação

$\emptyset$ *denota o conjunto vazio.*

$$a \in A \;:= a \text{ é elemento do conjunto } A,$$

Conjuntos

A, B: conjuntos

Notação

$\emptyset$ *denota o conjunto vazio.*

$$a \in A \ := a \text{ é elemento do conjunto } A,$$
$$a \notin A \ :=$$

Conjuntos

A, B: conjuntos

Notação

$\emptyset$ denota o conjunto vazio.

$$
\begin{aligned}
a \in A &:= a \text{ é elemento do conjunto } A, \\
a \notin A &:= \text{ não } (a \in A),
\end{aligned}
$$

Conjuntos

A, B: conjuntos

Notação

$\emptyset$ *denota o conjunto vazio.*

$$
\begin{aligned}
a \in A &:= a \text{ é elemento do conjunto } A,\\
a \notin A &:= \text{ não } (a \in A),\\
A \subseteq B &:=
\end{aligned}
$$

Conjuntos

A, B: conjuntos

Notação

$\emptyset$ *denota o conjunto vazio.*

$$\begin{aligned} a \in A &:= a \text{ é elemento do conjunto } A, \\ a \notin A &:= \text{ não } (a \in A), \\ A \subseteq B &:= a \in B, \text{ para todo } a \in A, \end{aligned}$$

Conjuntos

A, B: conjuntos

Notação

$\emptyset$ *denota o conjunto vazio.*

$$
\begin{aligned}
a \in A &:= a \text{ é elemento do conjunto } A,\\
a \notin A &:= \text{ não } (a \in A),\\
A \subseteq B &:= a \in B, \text{ para todo } a \in A,\\
A \not\subseteq B &:=
\end{aligned}
$$

Conjuntos

A, B: conjuntos

Notação

$\emptyset$ *denota o conjunto vazio.*

$$\begin{aligned}
a \in A &:= a \text{ é elemento do conjunto } A,\\
a \notin A &:= \text{ não } (a \in A),\\
A \subseteq B &:= a \in B, \text{ para todo } a \in A,\\
A \not\subseteq B &:= \text{ não } (A \subseteq B),
\end{aligned}$$

Conjuntos

A, B: conjuntos

Notação

$\emptyset$ *denota o conjunto vazio.*

$$
\begin{aligned}
a \in A &:= a \text{ é elemento do conjunto } A,\\
a \notin A &:= \text{ não } (a \in A),\\
A \subseteq B &:= a \in B, \text{ para todo } a \in A,\\
A \not\subseteq B &:= \text{ não } (A \subseteq B),\\
A = B &:=
\end{aligned}
$$

Conjuntos

A, B: conjuntos

Notação

$\emptyset$ *denota o conjunto vazio.*

$$
\begin{aligned}
a \in A &:= a \text{ é elemento do conjunto } A, \\
a \notin A &:= \text{ não } (a \in A), \\
A \subseteq B &:= a \in B, \text{ para todo } a \in A, \\
A \nsubseteq B &:= \text{ não } (A \subseteq B), \\
A = B &:= (A \subseteq B) \text{ e } (B \subseteq A),
\end{aligned}
$$

Conjuntos

A, B: conjuntos

Notação

$\emptyset$ *denota o conjunto vazio.*

$$
\begin{aligned}
a \in A &:= a \text{ é elemento do conjunto } A,\\
a \notin A &:= \text{ não } (a \in A),\\
A \subseteq B &:= a \in B, \text{ para todo } a \in A,\\
A \not\subseteq B &:= \text{ não } (A \subseteq B),\\
A = B &:= (A \subseteq B) \text{ e } (B \subseteq A),\\
A \cup B &:=
\end{aligned}
$$

Conjuntos

A, B: conjuntos

Notação

$\emptyset$ *denota o conjunto vazio.*

$$
\begin{aligned}
a \in A &:= a \text{ é elemento do conjunto } A,\\
a \notin A &:= \text{ não } (a \in A),\\
A \subseteq B &:= a \in B, \text{ para todo } a \in A,\\
A \not\subseteq B &:= \text{ não } (A \subseteq B),\\
A = B &:= (A \subseteq B) \text{ e } (B \subseteq A),\\
A \cup B &:= \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\},
\end{aligned}
$$

Conjuntos

A, B: conjuntos

Notação

$\emptyset$ *denota o conjunto vazio.*

$$
\begin{aligned}
a \in A &:= a \text{ é elemento do conjunto } A,\\
a \notin A &:= \text{ não } (a \in A),\\
A \subseteq B &:= a \in B, \text{ para todo } a \in A,\\
A \nsubseteq B &:= \text{ não } (A \subseteq B),\\
A = B &:= (A \subseteq B) \text{ e } (B \subseteq A),\\
A \cup B &:= \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\},\\
A \cap B &:=
\end{aligned}
$$

Conjuntos

A, B: conjuntos

Notação

$\emptyset$ *denota o conjunto vazio.*

$$
\begin{aligned}
a \in A &:= a \text{ é elemento do conjunto } A,\\
a \notin A &:= \text{ não } (a \in A),\\
A \subseteq B &:= a \in B, \text{ para todo } a \in A,\\
A \nsubseteq B &:= \text{ não } (A \subseteq B),\\
A = B &:= (A \subseteq B) \text{ e } (B \subseteq A),\\
A \cup B &:= \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\},\\
A \cap B &:= \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\},
\end{aligned}
$$

Conjuntos

A, B: conjuntos

Notação

$\emptyset$ *denota o conjunto vazio.*

$$
\begin{aligned}
a \in A &:= a \text{ é elemento do conjunto } A, \\
a \notin A &:= \text{ não } (a \in A), \\
A \subseteq B &:= a \in B, \text{ para todo } a \in A, \\
A \not\subseteq B &:= \text{ não } (A \subseteq B), \\
A = B &:= (A \subseteq B) \text{ e } (B \subseteq A), \\
A \cup B &:= \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}, \\
A \cap B &:= \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}, \\
A - B &:=
\end{aligned}
$$

Conjuntos

A, B: conjuntos

Notação

$\emptyset$ *denota o conjunto vazio.*

$$
\begin{aligned}
a \in A &:= a \text{ é elemento do conjunto } A,\\
a \notin A &:= \text{ não } (a \in A),\\
A \subseteq B &:= a \in B, \text{ para todo } a \in A,\\
A \nsubseteq B &:= \text{ não } (A \subseteq B),\\
A = B &:= (A \subseteq B) \text{ e } (B \subseteq A),\\
A \cup B &:= \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\},\\
A \cap B &:= \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\},\\
A - B &:= \{a \mid a \in A \text{ e } a \notin B\},
\end{aligned}
$$

Conjuntos

A, B: conjuntos

Notação

$\emptyset$ *denota o conjunto vazio.*

$$
\begin{aligned}
a \in A &:= a \text{ é elemento do conjunto } A,\\
a \notin A &:= \text{ não } (a \in A),\\
A \subseteq B &:= a \in B, \text{ para todo } a \in A,\\
A \not\subseteq B &:= \text{ não } (A \subseteq B),\\
A = B &:= (A \subseteq B) \text{ e } (B \subseteq A),\\
A \cup B &:= \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\},\\
A \cap B &:= \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\},\\
A - B &:= \{a \mid a \in A \text{ e } a \notin B\},\\
|A| &:=
\end{aligned}
$$

Conjuntos

A, B: conjuntos

Notação

$\emptyset$ *denota o conjunto vazio.*

$$
\begin{aligned}
a \in A &:= a \text{ é elemento do conjunto } A,\\
a \notin A &:= \text{ não } (a \in A),\\
A \subseteq B &:= a \in B, \text{ para todo } a \in A,\\
A \not\subseteq B &:= \text{ não } (A \subseteq B),\\
A = B &:= (A \subseteq B) \text{ e } (B \subseteq A),\\
A \cup B &:= \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\},\\
A \cap B &:= \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\},\\
A - B &:= \{a \mid a \in A \text{ e } a \notin B\},\\
|A| &:= \text{número de elementos do conjunto } A.
\end{aligned}
$$

Conjuntos

A, B: conjuntos

Notação

$\emptyset$ denota o conjunto vazio.

$$
\begin{aligned}
a \in A &:= a \text{ é elemento do conjunto } A,\\
a \notin A &:= \text{ não } (a \in A),\\
A \subseteq B &:= a \in B, \text{ para todo } a \in A,\\
A \not\subseteq B &:= \text{ não } (A \subseteq B),\\
A = B &:= (A \subseteq B) \text{ e } (B \subseteq A),\\
A \cup B &:= \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\},\\
A \cap B &:= \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\},\\
A - B &:= \{a \mid a \in A \text{ e } a \notin B\},\\
|A| &:= \text{número de elementos do conjunto } A.
\end{aligned}
$$

Exercício 11

Inteiros

Inteiros

$$\begin{aligned}
A &: \text{conjunto} \\
z_1, z_2, z_3 &\in \mathbb{Z} \\
q &\in \mathbb{Q} \\
x &\in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Inteiros

$$\begin{aligned} A &: \text{conjunto} \\ z_1, z_2, z_3 &\in \mathbb{Z} \\ q &\in \mathbb{Q} \\ x &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Definição

O **intervalo inteiro** *de z_1 a z_2 é o conjunto dos inteiros entre z_1 e z_2, ou seja*

$$[z_1..z_2] := \{z \in \mathbb{Z} \mid z_1 \leq z \leq z_2\}.$$

Inteiros

Definição

Dado $A \subseteq \mathbb{R}$,

- *o* **mínimo** *de* A *é um elemento* m *de* A *satisfazendo*

$$m \leq a, \text{ para todo } a \in A.$$

Definição

Dado $A \subseteq \mathbb{R}$,

- *o* **mínimo** *de* A *é um elemento* m *de* A *satisfazendo*

$$m \leq a, \ \textit{para todo } a \in A.$$

- *o* **máximo** *de* A *é um elemento* m *de* A *satisfazendo*

$$m \geq a, \ \textit{para todo } a \in A.$$

Inteiros

Inteiros

Notação

$\min A$ *denota o mínimo de* A.

Notação

$\max A$ *denota o máximo de* A.

Inteiros

Notação

$\min A$ *denota o mínimo de* A.

Notação

$\max A$ *denota o máximo de* A.

Conjuntos podem não ter mínimo ou máximo. Por exemplo,

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\}.$$

Inteiros

Notação

$\min A$ *denota o mínimo de* A*.*

Notação

$\max A$ *denota o máximo de* A*.*

Conjuntos podem não ter mínimo ou máximo. Por exemplo,

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\}.$$

Notação

$\lg x$ *denota* $\log_2 x$*.*

Somatórios e Produtórios

Somatórios e Produtórios

$f \colon A \to \mathbb{C}$

X: subconjunto finito de A.

a, b: inteiros.

Somatórios e Produtórios

$f : A \to \mathbb{C}$

X: subconjunto finito de A.

a, b: inteiros.

Notação

$$\sum_{x \in X} f(x)$$

Somatórios e Produtórios

$f : A \to \mathbb{C}$

X: subconjunto finito de A.

a, b: inteiros.

Notação

$$\sum_{x \in X} f(x)$$

Se $X = \emptyset$, então

Somatórios e Produtórios

$f : A \to \mathbb{C}$

X: subconjunto finito de A.

a, b: inteiros.

Notação

$$\sum_{x \in X} f(x)$$

Se $X = \emptyset$, então

$$\sum_{x \in X} f(x) = 0.$$

Somatórios e Produtórios

$f : A \to \mathbb{C}$

X: subconjunto finito de A.

a, b: inteiros.

Notação

$$\sum_{x \in X} f(x)$$

Se $X = \emptyset$, então

$$\sum_{x \in X} f(x) = 0.$$

$$\sum_{i=a}^{b} f(i) :=$$

Somatórios e Produtórios

$f : A \to \mathbb{C}$
X: subconjunto finito de A.
a, b: inteiros.

Notação

$$\sum_{x \in X} f(x)$$

Se $X = \emptyset$, então

$$\sum_{x \in X} f(x) = 0.$$

$$\sum_{i=a}^{b} f(i) := \sum_{x \in [a..b]} f(x).$$

Teorema 4

X finito e $c \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{x \in X} c =$$

Teorema 4

X finito e $c \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{x \in X} c = c|X|.$$

Demonstração.

Exercício **??** $\square$

Teorema 5

$f, g \colon A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ finito,

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) =$$

Teorema 5

$f, g \colon A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ finito,

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x).$$

Demonstração.

Exercício **??** $\square$

Teorema 6

Dada $f\colon A \to \mathbb{C}$, $X \subseteq A$ finito e $c \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{x \in X} cf(x) =$$

Teorema 6

Dada $f\colon A \to \mathbb{C}$, $X \subseteq A$ finito e $c \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{x \in X} cf(x) = c \sum_{x \in X} f(x).$$

Demonstração.

Exercício **??** $\square$

Somatórios e Produtórios

Somatórios e Produtórios

Notação

$$\prod_{x \in X} f(x)$$

Notação

$$\prod_{x \in X} f(x)$$

Se $X = \emptyset$, *então*

$$\prod_{x \in X} f(x) =$$

Notação

$$\prod_{x \in X} f(x)$$

Se $X = \emptyset$, *então*

$$\prod_{x \in X} f(x) = 1.$$

Notação

$$\prod_{x \in X} f(x)$$

Se $X = \emptyset$, então

$$\prod_{x \in X} f(x) = 1.$$

$$\prod_{i=a}^{b} f(i) :=$$

Notação

$$\prod_{x \in X} f(x)$$

Se $X = \emptyset$, *então*

$$\prod_{x \in X} f(x) = 1.$$

$$\prod_{i=a}^{b} f(i) := \prod_{x \in [a..b]} f(x).$$

Exercício 14.