Matemática Discreta

Unidade 4: Aproximação Assintótica

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Unidade 4: Aproximação Assintótica

$f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Unidade 4: Aproximação Assintótica

$f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

f e g são **aproximadamente iguais** (cfr. Ex. 7) se

$$\lim \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

Unidade 4: Aproximação Assintótica

$f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

f e g são **aproximadamente iguais** (cfr. Ex. 7) se

$$\lim \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

$$f(n) \approx g(n).$$

Teorema 7

As funções $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ são tais que $f(n) \approx g(n)$ se e somente se existe $\varepsilon\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(n) = g(n)(1 + \varepsilon(n)),$$

e

Teorema 7

As funções $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ são tais que $f(n) \approx g(n)$ se e somente se existe $\varepsilon\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(n) = g(n)(1 + \varepsilon(n)),$$

e

$$\lim \varepsilon(n) = 0.$$

Teorema 7

As funções $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ são tais que $f(n) \approx g(n)$ se e somente se existe $\varepsilon\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(n) = g(n)(1 + \varepsilon(n)),$$

e

$$\lim \varepsilon(n) = 0.$$

Demonstração.

Exercício 23 $\square$

Exercício 15

A **Série Harmônica** é a série dada por

$$H(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

A diferença $H(n) - \ln n$ converge e seu limite é conhecido como **constante de Euler–Mascheroni**, isto é,

$\lim H(n) - \ln n = \gamma := 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399 2\ldots$

Prove que

$$H(n) \approx \ln n.$$

Exercício 15

Do enunciado, temos que

$$\lim H(n) - \ln n = \gamma := 0.5772\ldots$$

Exercício 15

Do enunciado, temos que

$$\lim H(n) - \ln n = \gamma := 0.5772\ldots$$

e "tirando" γ de ambos os lados da igualdade temos

$$\lim(H(n) - \ln n) - \gamma = \gamma - \gamma = 0$$

Exercício 15

Do enunciado, temos que

$$\lim H(n) - \ln n = \gamma := 0.5772\ldots$$

e "tirando" γ de ambos os lados da igualdade temos

$$\lim(H(n) - \ln n) - \gamma = \gamma - \gamma = 0$$

Fazendo

$$t(n) = H(n) - \ln n - \gamma,$$

temos

Exercício 15

Do enunciado, temos que

$$\lim H(n) - \ln n = \gamma := 0.5772\ldots$$

e "tirando" γ de ambos os lados da igualdade temos

$$\lim(H(n) - \ln n) - \gamma = \gamma - \gamma = 0$$

Fazendo

$$t(n) = H(n) - \ln n - \gamma,$$

temos

$$\lim t(n) = 0,$$

e então

Exercício 15

Do enunciado, temos que

$$\lim H(n) - \ln n = \gamma := 0.5772\ldots$$

e "tirando" γ de ambos os lados da igualdade temos

$$\lim(H(n) - \ln n) - \gamma = \gamma - \gamma = 0$$

Fazendo

$$t(n) = H(n) - \ln n - \gamma,$$

temos

$$\lim t(n) = 0,$$

e então

$$H(n) = \ln n + \gamma + t(n) =$$

Exercício 15

Do enunciado, temos que

$$\lim H(n) - \ln n = \gamma := 0.5772\ldots$$

e "tirando" γ de ambos os lados da igualdade temos

$$\lim(H(n) - \ln n) - \gamma = \gamma - \gamma = 0$$

Fazendo

$$t(n) = H(n) - \ln n - \gamma,$$

temos

$$\lim t(n) = 0,$$

e então

$$H(n) = \ln n + \gamma + t(n) = \ln n \left(1 + \frac{\gamma + t(n)}{\ln n}\right),$$

e portanto,

$$H(n) \approx \ln n.$$

Exercício 16a

Prove que

$$\binom{n}{2} \approx \frac{n^2}{2}$$

Exercício 16a

Prove que

$$\binom{n}{2} \approx \frac{n^2}{2}$$

Como

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

Exercício 16a

Prove que

$$\binom{n}{2} \approx \frac{n^2}{2}$$

Como

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

e

$$\lim -\frac{1}{n} = 0$$

temos que

$$\binom{n}{2} \approx \frac{n^2}{2}$$

Exercício ???

Seja $n \in \mathbb{N}$ e $n > 0$. É verdade que $\binom{n}{3} \approx \frac{n^3}{3}$?

Exercício ???

Seja $n \in \mathbb{N}$ e $n > 0$. É verdade que $\binom{n}{3} \approx \frac{n^3}{3}$?

Como

$$\binom{n}{3} = \frac{n!}{(n-3)!3!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$
$$= \frac{n^3 - 3n^2 - 2n}{6} = \frac{n^3}{6}\left(1 - \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}\right)$$

Exercício ???

Seja $n \in \mathbb{N}$ e $n > 0$. É verdade que $\binom{n}{3} \approx \frac{n^3}{3}$?

Como

$$\binom{n}{3} = \frac{n!}{(n-3)!3!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$
$$= \frac{n^3 - 3n^2 - 2n}{6} = \frac{n^3}{6}\left(1 - \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}\right)$$

e

$$\lim \frac{\binom{n}{3}}{\frac{n^3}{3}} = \lim \frac{\frac{n^3}{6}\left(1 - \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}\right)}{\frac{n^3}{3}} = \frac{1}{2},$$

Exercício ???

Seja $n \in \mathbb{N}$ e $n > 0$. É verdade que $\binom{n}{3} \approx \frac{n^3}{3}$?

Como

$$\begin{aligned}\binom{n}{3} &= \frac{n!}{(n-3)!3!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \\ &= \frac{n^3 - 3n^2 - 2n}{6} = \frac{n^3}{6}\left(1 - \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}\right)\end{aligned}$$

e

$$\lim \frac{\binom{n}{3}}{\frac{n^3}{3}} = \lim \frac{\frac{n^3}{6}\left(1 - \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}\right)}{\frac{n^3}{3}} = \frac{1}{2},$$

então

$$\binom{n}{3} \not\approx \frac{n^3}{3}.$$

Exercício 16c

A partir da aproximação de Stirling,

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

prove que

$$\log_b n! \approx n \log_b n, \text{ para todo } b > 1.$$

Exercício 16c

Como

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

ou seja

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Exercício 16c

Como

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

ou seja

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n(1+\varepsilon(n)),$$

para alguma função $\varepsilon\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim \varepsilon(n) = 0.$$

Exercício 16c

Então, para todo $b > 1$,

$$\log_b n! = \log_b \left(\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n (1 + \varepsilon(n)) \right)$$

Exercício 16c

Então, para todo $b > 1$,

$$
\begin{aligned}
\log_b n! &= \log_b \left(\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n (1 + \varepsilon(n)) \right) \\
&= \log_b \sqrt{2\pi n} + n(\log_b n - \log_b e) + \log_b(1 + \varepsilon(n))
\end{aligned}
$$

Exercício 16c

Então, para todo $b > 1$,

$$
\begin{aligned}
\log_b n! &= \log_b \left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n (1+\varepsilon(n))\right) \\
&= \log_b \sqrt{2\pi n} + n(\log_b n - \log_b e) + \log_b(1+\varepsilon(n)) \\
&= \log_b \sqrt{2\pi n} + n\log_b n - n\log_b e + \log_b(1+\varepsilon(n))
\end{aligned}
$$

Exercício 16c

Então, para todo $b > 1$,

$$
\begin{aligned}
\log_b n! &= \log_b \left(\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n (1 + \varepsilon(n)) \right) \\
&= \log_b \sqrt{2\pi n} + n(\log_b n - \log_b e) + \log_b(1 + \varepsilon(n)) \\
&= \log_b \sqrt{2\pi n} + n \log_b n - n \log_b e + \log_b(1 + \varepsilon(n)) \\
&= n \log_b n \left(1 - \frac{\log_b e}{\log_b n} + \frac{\log_b \sqrt{2\pi n}}{n \log_b n} + \frac{\log_b(1 + \varepsilon(n))}{n \log_b n} \right),
\end{aligned}
$$

Exercício 16c

Então, para todo $b > 1$,

$$\begin{aligned}
\log_b n! &= \log_b \left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n (1+\varepsilon(n))\right)\\
&= \log_b \sqrt{2\pi n} + n(\log_b n - \log_b e) + \log_b(1+\varepsilon(n))\\
&= \log_b \sqrt{2\pi n} + n\log_b n - n\log_b e + \log_b(1+\varepsilon(n))\\
&= n\log_b n\left(1 - \frac{\log_b e}{\log_b n} + \frac{\log_b \sqrt{2\pi n}}{n\log_b n} + \frac{\log_b(1+\varepsilon(n))}{n\log_b n}\right),
\end{aligned}$$

e como

$$\lim -\frac{\log_b e}{\log_b n} + \frac{\log_b \sqrt{2\pi n}}{n\log_b n} + \frac{\log_b(1+\varepsilon(n))}{n\log_b n} = 0,$$

Exercício 16c

Então, para todo $b > 1$,

$$\begin{aligned}
\log_b n! &= \log_b \left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n (1+\varepsilon(n))\right)\\
&= \log_b \sqrt{2\pi n} + n(\log_b n - \log_b e) + \log_b(1+\varepsilon(n))\\
&= \log_b \sqrt{2\pi n} + n\log_b n - n\log_b e + \log_b(1+\varepsilon(n))\\
&= n\log_b n \left(1 - \frac{\log_b e}{\log_b n} + \frac{\log_b \sqrt{2\pi n}}{n\log_b n} + \frac{\log_b(1+\varepsilon(n))}{n\log_b n}\right),
\end{aligned}$$

e como

$$\lim -\frac{\log_b e}{\log_b n} + \frac{\log_b \sqrt{2\pi n}}{n\log_b n} + \frac{\log_b(1+\varepsilon(n))}{n\log_b n} = 0,$$

então

$$\log_b n! \approx n\log_b n, \text{ para todo } b > 1.$$

Exercício 16d

Use o resultado do Exercício 16c para provar que

$$\sum_{i=1}^{n} \log_b i \approx n \log_b n, \text{ para todo } b > 1$$

Exercício 16d

Use o resultado do Exercício 16c para provar que

$$\sum_{i=1}^{n} \log_b i \approx n \log_b n, \text{ para todo } b > 1$$

Para todo $b > 1$,

$$\sum_{i=1}^{n} \log_b i = \log_b \left(\prod_{i=1}^{n} i \right) = \log_b n!,$$

Exercício 16d

Use o resultado do Exercício 16c para provar que

$$\sum_{i=1}^{n} \log_b i \approx n \log_b n, \text{ para todo } b > 1$$

Para todo $b > 1$,

$$\sum_{i=1}^{n} \log_b i = \log_b \left(\prod_{i=1}^{n} i \right) = \log_b n!,$$

e do Exercício 16c, temos

$$\log_b n! \approx n \log_b n.$$

Exercício 16d

Use o resultado do Exercício 16c para provar que

$$\sum_{i=1}^{n} \log_b i \approx n \log_b n, \text{ para todo } b > 1$$

Para todo $b > 1$,

$$\sum_{i=1}^{n} \log_b i = \log_b \left(\prod_{i=1}^{n} i \right) = \log_b n!,$$

e do Exercício 16c, temos

$$\log_b n! \approx n \log_b n.$$

Portanto

$$\sum_{i=1}^{n} \log_b i \approx n \log_b n, \text{ para todo } b > 1.$$