# Matemática Discreta

## Unidade 5: Piso e Teto (1)

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

# Definições

# Definições

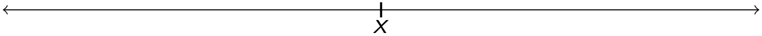
piso de $x$: maior inteiro $\leq x$

# Definições

piso de $x$: maior inteiro $\leq x$ $\qquad$ $\lfloor x \rfloor := \max \{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}$

# Definições

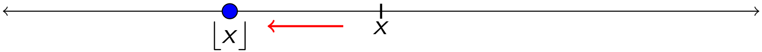
piso de $x$: maior inteiro $\leq x$ $\qquad$ $\lfloor x \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}$



# Definições

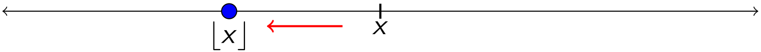
piso de $x$: maior inteiro $\leq x$

$$\lfloor x \rfloor := \max \{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}$$



# Definições

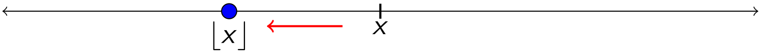
piso de $x$: maior inteiro $\leq x$ $\qquad$ $\lfloor x \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}$



teto de $x$: menor inteiro $\geq x$

# Definições

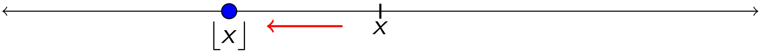
piso de $x$: maior inteiro $\leq x$ $\qquad$ $\lfloor x \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}$



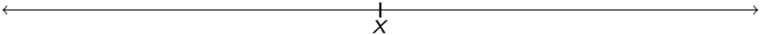

teto de $x$: menor inteiro $\geq x$ $\qquad$ $\lceil x \rceil := \min\{z \in \mathbb{Z} \mid z \geq x\}$

# Definições

piso de $x$: maior inteiro $\leq x$ $\lfloor x \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}$

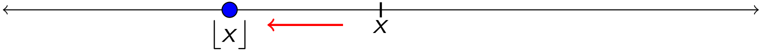



teto de $x$: menor inteiro $\geq x$ $\lceil x \rceil := \min\{z \in \mathbb{Z} \mid z \geq x\}$

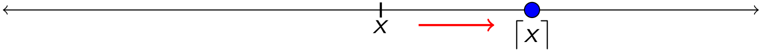


# Definições

piso de $x$: maior inteiro $\leq x$ $\qquad$ $\lfloor x \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}$




teto de $x$: menor inteiro $\geq x$ $\qquad$ $\lceil x \rceil := \min\{z \in \mathbb{Z} \mid z \geq x\}$



# Exemplos

$$\lfloor 2 \rfloor$$

# Exemplos

$$\lfloor 2 \rfloor = 2$$

# Exemplos

$$\begin{aligned} \lfloor 2 \rfloor &= 2 \\ \lceil 2 \rceil & \end{aligned}$$

# Exemplos

$$
\begin{aligned}
\lfloor 2 \rfloor &= 2 \\
\lceil 2 \rceil &= 2
\end{aligned}
$$

# Exemplos

$$
\begin{aligned}
\lfloor 2 \rfloor &= 2 \\
\lceil 2 \rceil &= 2 \\
\lfloor z \rfloor &
\end{aligned}
$$

# Exemplos

$$\begin{aligned}
\lfloor 2 \rfloor &= 2 \\
\lceil 2 \rceil &= 2 \\
\lfloor z \rfloor &= z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

# Exemplos

$$\begin{aligned}
\lfloor 2 \rfloor &= 2 \\
\lceil 2 \rceil &= 2 \\
\lfloor z \rfloor &= z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z} \\
\lceil z \rceil &
\end{aligned}$$

# Exemplos

$$
\begin{aligned}
\lfloor 2 \rfloor &= 2 \\
\lceil 2 \rceil &= 2 \\
\lfloor z \rfloor &= z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z} \\
\lceil z \rceil &= z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

# Exemplos

$$
\begin{aligned}
\lfloor 2 \rfloor &= 2 \\
\lceil 2 \rceil &= 2 \\
\lfloor z \rfloor &= z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z} \\
\lceil z \rceil &= z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z} \\
\left\lfloor \frac{35}{23} \right\rfloor &
\end{aligned}
$$

# Exemplos

$$
\begin{aligned}
\lfloor 2 \rfloor &= 2 \\
\lceil 2 \rceil &= 2 \\
\lfloor z \rfloor &= z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z} \\
\lceil z \rceil &= z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z} \\
\left\lfloor \frac{35}{23} \right\rfloor &= 1
\end{aligned}
$$

# Exemplos

$$
\begin{aligned}
\lfloor 2 \rfloor &= 2 \\
\lceil 2 \rceil &= 2 \\
\lfloor z \rfloor &= z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z} \\
\lceil z \rceil &= z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z} \\
\left\lfloor \frac{35}{23} \right\rfloor &= 1 \\
\left\lceil \frac{35}{23} \right\rceil &
\end{aligned}
$$

# Exemplos

$$
\begin{aligned}
\lfloor 2 \rfloor &= 2 \\
\lceil 2 \rceil &= 2 \\
\lfloor z \rfloor &= z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z} \\
\lceil z \rceil &= z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z} \\
\left\lfloor \frac{35}{23} \right\rfloor &= 1 \\
\left\lceil \frac{35}{23} \right\rceil &= 2
\end{aligned}
$$

# Exemplos

$$
\begin{aligned}
\lfloor 2 \rfloor &= 2 \\
\lceil 2 \rceil &= 2 \\
\lfloor z \rfloor &= z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z} \\
\lceil z \rceil &= z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z} \\
\left\lfloor \frac{35}{23} \right\rfloor &= 1 \\
\left\lceil \frac{35}{23} \right\rceil &= 2 \\
\left\lfloor \frac{-35}{23} \right\rfloor &
\end{aligned}
$$

# Exemplos

$$
\begin{aligned}
\lfloor 2 \rfloor &= 2 \\
\lceil 2 \rceil &= 2 \\
\lfloor z \rfloor &= z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z} \\
\lceil z \rceil &= z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z} \\
\left\lfloor \frac{35}{23} \right\rfloor &= 1 \\
\left\lceil \frac{35}{23} \right\rceil &= 2 \\
\left\lfloor \frac{-35}{23} \right\rfloor &= -2
\end{aligned}
$$

# Exemplos

$$\begin{aligned}
\lfloor 2 \rfloor &= 2 \\
\lceil 2 \rceil &= 2 \\
\lfloor z \rfloor &= z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z} \\
\lceil z \rceil &= z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z} \\
\left\lfloor \frac{35}{23} \right\rfloor &= 1 \\
\left\lceil \frac{35}{23} \right\rceil &= 2 \\
\left\lfloor \frac{-35}{23} \right\rfloor &= -2 \\
\left\lceil \frac{-35}{23} \right\rceil &
\end{aligned}$$

# Exemplos

$$
\begin{aligned}
\lfloor 2 \rfloor &= 2 \\
\lceil 2 \rceil &= 2 \\
\lfloor z \rfloor &= z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z} \\
\lceil z \rceil &= z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z} \\
\left\lfloor \frac{35}{23} \right\rfloor &= 1 \\
\left\lceil \frac{35}{23} \right\rceil &= 2 \\
\left\lfloor \frac{-35}{23} \right\rfloor &= -2 \\
\left\lceil \frac{-35}{23} \right\rceil &= -1
\end{aligned}
$$

## Teorema 8

# Teorema 8

$\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro que satisfaz

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

# Teorema 8

$\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro que satisfaz

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

Demonstração.

$\square$

# Teorema 8

$\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro que satisfaz

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

Demonstração.

1. $\{y \in \mathbb{R} \mid x - 1 < y \leq x\}$

$\square$

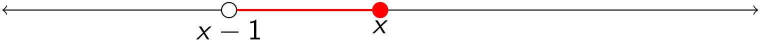
# Teorema 8

$\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro que satisfaz

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

**Demonstração.**

1. $\{y \in \mathbb{R} \mid x - 1 < y \leq x\}$




$\square$

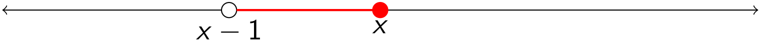
# Teorema 8

$\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro que satisfaz

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

Demonstração.

1. $\{y \in \mathbb{R} \mid x - 1 < y \leq x\}$ tem **um único** inteiro




$\square$

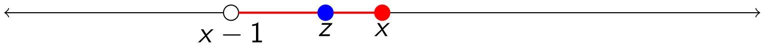
# Teorema 8

$\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro que satisfaz

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

Demonstração.

1. $\{y \in \mathbb{R} \mid x - 1 < y \leq x\}$ tem **um único** inteiro: $z$




□

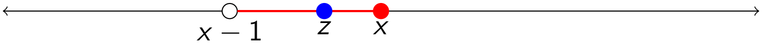
# Teorema 8

$\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro que satisfaz

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

Demonstração.

1. $\{y \in \mathbb{R} \mid x - 1 < y \leq x\}$ tem **um único** inteiro: $z$
2. todo inteiro maior que $z$ também é maior que $x$




$\square$

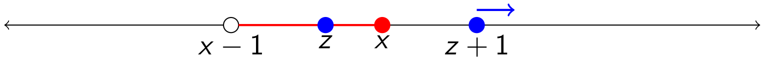
# Teorema 8

$\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro que satisfaz

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

Demonstração.

1. $\{y \in \mathbb{R} \mid x - 1 < y \leq x\}$ tem **um único** inteiro: $z$
2. todo inteiro maior que $z$ também é maior que $x$




$\square$

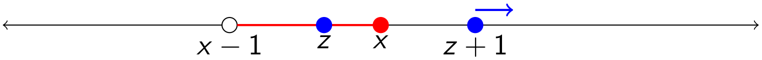
# Teorema 8

$\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro que satisfaz

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

Demonstração.

1. $\{y \in \mathbb{R} \mid x - 1 < y \leq x\}$ tem **um único** inteiro: $z$
2. todo inteiro maior que $z$ também é maior que $x$
3. $z$ é o maior inteiro $\leq x$




$\square$

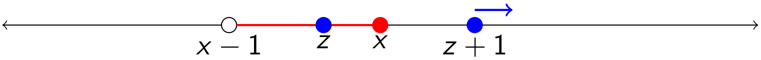
# Teorema 8

$\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro que satisfaz

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

Demonstração.

1. $\{y \in \mathbb{R} \mid x - 1 < y \leq x\}$ tem **um único** inteiro: $z$
2. todo inteiro maior que $z$ também é maior que $x$
3. $z$ é o maior inteiro $\leq x$
4. $z = \lfloor x \rfloor$




$\square$

# Teorema 9

# Teorema 9

$\lceil x \rceil$ é o único inteiro que satisfaz

$$x \leq \lceil x \rceil < x + 1$$

# Teorema 9

$\lceil x \rceil$ é o único inteiro que satisfaz

$$x \leq \lceil x \rceil < x + 1$$

Demonstração.

Exercício 29 $\square$

# Exercício 36

# Exercício 36

$$\frac{n}{2} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq n \leq 2^{\lceil \lg n \rceil} < 2n$$

# Exercício 36

$$\frac{n}{2} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq n \leq 2^{\lceil \lg n \rceil} < 2n$$

$$\lfloor \lg n \rfloor \quad \leq \quad \lg n \quad \leq \quad \lceil \lg n \rceil$$

# Exercício 36

$$\frac{n}{2} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq n \leq 2^{\lceil \lg n \rceil} < 2n$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \lfloor \lg n \rfloor & \leq & \lg n & \leq & \lceil \lg n \rceil & & \\ \lg n - 1 & < & \lfloor \lg n \rfloor & \leq & \lg n & \leq & \lceil \lg n \rceil & < & \lg n + 1 \end{array} \qquad \text{(T. 8 e 9)}$$

# Exercício 36

$$\frac{n}{2} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq n \leq 2^{\lceil \lg n \rceil} < 2n$$

$$\begin{array}{ccccccccccl}
 & & \lfloor \lg n \rfloor & \leq & \lg n & \leq & \lceil \lg n \rceil & & & & \\
\lg n - 1 & < & \lfloor \lg n \rfloor & \leq & \lg n & \leq & \lceil \lg n \rceil & < & \lg n + 1 & & \text{(T. 8 e 9)} \\
2^{\lg n - 1} & < & 2^{\lfloor \lg n \rfloor} & \leq & 2^{\lg n} & \leq & 2^{\lceil \lg n \rceil} & < & 2^{\lg n + 1} & & 2^x \text{ é função crescente}
\end{array}$$

# Exercício 36

$$\frac{n}{2} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq n \leq 2^{\lceil \lg n \rceil} < 2n$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & \lfloor \lg n \rfloor & \leq & \lg n & \leq & \lceil \lg n \rceil & & & & \\
\lg n - 1 & < & \lfloor \lg n \rfloor & \leq & \lg n & \leq & \lceil \lg n \rceil & < & \lg n + 1 & & \text{(T. 8 e 9)} \\
2^{\lg n - 1} & < & 2^{\lfloor \lg n \rfloor} & \leq & 2^{\lg n} & \leq & 2^{\lceil \lg n \rceil} & < & 2^{\lg n + 1} & & 2^x \text{ é função crescente} \\
n \times 2^{-1} & < & 2^{\lfloor \lg n \rfloor} & \leq & n & \leq & 2^{\lceil \lg n \rceil} & < & n \times 2^1 & & (2^{\lg n} = n)
\end{array}$$

# Exercício 36

$$\frac{n}{2} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq n \leq 2^{\lceil \lg n \rceil} < 2n$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & \lfloor \lg n \rfloor & \leq & \lg n & \leq & \lceil \lg n \rceil & & & & \\
\lg n - 1 & < & \lfloor \lg n \rfloor & \leq & \lg n & \leq & \lceil \lg n \rceil & < & \lg n + 1 & & \text{(T. 8 e 9)} \\
2^{\lg n - 1} & < & 2^{\lfloor \lg n \rfloor} & \leq & 2^{\lg n} & \leq & 2^{\lceil \lg n \rceil} & < & 2^{\lg n + 1} & & 2^x \text{ é função crescente} \\
n \times 2^{-1} & < & 2^{\lfloor \lg n \rfloor} & \leq & n & \leq & 2^{\lceil \lg n \rceil} & < & n \times 2^1 & & (2^{\lg n} = n) \\
\frac{n}{2} & < & 2^{\lfloor \lg n \rfloor} & \leq & n & \leq & 2^{\lceil \lg n \rceil} & < & 2n & &
\end{array}$$

# Corolário 10

# Corolário 10

$$\lfloor x \rfloor + z = \lfloor x + z \rfloor$$

# Corolário 10

$$\lfloor x \rfloor + z = \lfloor x + z \rfloor \,, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Z}$$

# Corolário 10

$$\lfloor x \rfloor + z = \lfloor x + z \rfloor \,, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Z}$$

Demonstração.

# Corolário 10

$$\lfloor x \rfloor + z = \lfloor x + z \rfloor \,, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Z}$$

Demonstração.

1. $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ (T. 8)

# Corolário 10

$$\lfloor x \rfloor + z = \lfloor x + z \rfloor \,, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Z}$$

Demonstração.

1. $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ (T. 8)
2. $(x - 1) + z < \lfloor x \rfloor + z \leq x + z$

# Corolário 10

$$\lfloor x \rfloor + z = \lfloor x + z \rfloor, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Z}$$

Demonstração.

1. $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ (T. 8)
2. $(x - 1) + z < \lfloor x \rfloor + z \leq x + z$
3. $(x + z) - 1 < \lfloor x \rfloor + z \leq x + z$

# Corolário 10

$$\lfloor x \rfloor + z = \lfloor x + z \rfloor, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Z}$$

Demonstração.

1. $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ (T. 8)
2. $(x - 1) + z < \lfloor x \rfloor + z \leq x + z$
3. $(x + z) - 1 < \lfloor x \rfloor + z \leq x + z$
4. $\lfloor x \rfloor + z$ é inteiro

# Corolário 10

$$\lfloor x \rfloor + z = \lfloor x + z \rfloor\,,\ \text{para todo } x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Z}$$

Demonstração.

1. $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ (T. 8)
2. $(x - 1) + z < \lfloor x \rfloor + z \leq x + z$
3. $(x + z) - 1 < \lfloor x \rfloor + z \leq x + z$
4. $\lfloor x \rfloor + z$ é inteiro
5. $\lfloor x \rfloor + z = \lfloor x + z \rfloor$ (T. 8)

$\square$

# Teorema 11

# Teorema 11

$$-\lceil x \rceil = \lfloor -x \rfloor$$

# Teorema 11

$$-\lceil x \rceil = \lfloor -x \rfloor, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

# Teorema 11

$$-\lceil x \rceil = \lfloor -x \rfloor \,, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Demonstração.

# Teorema 11

$$-\lceil x \rceil = \lfloor -x \rfloor, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Demonstração.

1. $x \leq \lceil x \rceil < x + 1$ (T. 9)

# Teorema 11

$$-\lceil x \rceil = \lfloor -x \rfloor, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Demonstração.

1. $x \leq \lceil x \rceil < x + 1$ (T. 9)
2. $-x \geq -\lceil x \rceil > -(x + 1)$

# Teorema 11

$$-\lceil x \rceil = \lfloor -x \rfloor, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Demonstração.

1. $x \leq \lceil x \rceil < x + 1$ (T. 9)
2. $-x \geq -\lceil x \rceil > -(x + 1)$
3. $(-x) - 1 < -\lceil x \rceil \leq -x$

# Teorema 11

$$-\lceil x \rceil = \lfloor -x \rfloor \text{, para todo } x \in \mathbb{R}$$

Demonstração.

1. $x \leq \lceil x \rceil < x + 1$ (T. 9)
2. $-x \geq -\lceil x \rceil > -(x + 1)$
3. $(-x) - 1 < -\lceil x \rceil \leq -x$
4. $-\lceil x \rceil$ é inteiro

# Teorema 11

$$- \lceil x \rceil = \lfloor -x \rfloor \,, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Demonstração.

1. $x \leq \lceil x \rceil < x + 1$ (T. 9)
2. $-x \geq - \lceil x \rceil > -(x+1)$
3. $(-x) - 1 < - \lceil x \rceil \leq -x$
4. $- \lceil x \rceil$ é inteiro
5. $- \lceil x \rceil = \lfloor -x \rfloor$ (T. 8)

$\square$

# Corolário 12

# Corolário 12

$$z - \lfloor x \rfloor = \lceil z - x \rceil$$

# Corolário 12

$$z - \lfloor x \rfloor = \lceil z - x \rceil\,, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Z}$$

# Corolário 12

$$z - \lfloor x \rfloor = \lceil z - x \rceil \text{, para todo } x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Z}$$

Demonstração.

# Corolário 12

$$z - \lfloor x \rfloor = \lceil z - x \rceil, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Z}$$

Demonstração.

$$z - \lfloor x \rfloor = -(\lfloor x \rfloor - z)$$

$\square$

# Corolário 12

$$z - \lfloor x \rfloor = \lceil z - x \rceil, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Z}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} z - \lfloor x \rfloor &= -(\lfloor x \rfloor - z) \\ &\overset{\text{T. 10}}{=} -\lfloor x - z \rfloor \end{aligned}$$

$\square$

# Corolário 12

$$z - \lfloor x \rfloor = \lceil z - x \rceil \,, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Z}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} z - \lfloor x \rfloor &= -(\lfloor x \rfloor - z) \\ &\overset{\text{T. 10}}{=} -\lfloor x - z \rfloor \\ &\overset{\text{T. 11}}{=} \lceil -(x - z) \rceil \end{aligned}$$

$\square$

# Corolário 12

$$z - \lfloor x \rfloor = \lceil z - x \rceil\,, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Z}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} z - \lfloor x \rfloor &= -(\lfloor x \rfloor - z) \\ &\overset{\text{T. 10}}{=} -\lfloor x - z \rfloor \\ &\overset{\text{T. 11}}{=} \lceil -(x - z) \rceil \\ &= \lceil z - x \rceil \end{aligned}$$

$\square$

# Teorema 13

$$\min \{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\} = \lfloor x \rfloor + 1$$

# Teorema 13

$$\min \{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\} = \lfloor x \rfloor + 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

# Teorema 13

$$\min \{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\} = \lfloor x \rfloor + 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Demonstração.

# Teorema 13

$$\min \{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\} = \lfloor x \rfloor + 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Demonstração.

1. $x \in \mathbb{R}$

# Teorema 13

$$\min\{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\} = \lfloor x \rfloor + 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Demonstração.

1. $x \in \mathbb{R}$
2. $m := \min\{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\}$

# Teorema 13

$$\min\{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\} = \lfloor x \rfloor + 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Demonstração.

1. $x \in \mathbb{R}$
2. $m := \min\{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\}$
3. $x < m \leq x + 1$

# Teorema 13

$$\min\{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\} = \lfloor x \rfloor + 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Demonstração.

1. $x \in \mathbb{R}$
2. $m := \min\{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\}$
3. $x < m \leq x + 1$ (único inteiro nesse intervalo)

# Teorema 13

$$\min \{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\} = \lfloor x \rfloor + 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Demonstração.

1. $x \in \mathbb{R}$
2. $m := \min \{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\}$
3. $x < m \leq x + 1$ (único inteiro nesse intervalo)
4. $(x + 1) - 1 < m \leq (x + 1)$

# Teorema 13

$$\min\{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\} = \lfloor x \rfloor + 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Demonstração.

1. $x \in \mathbb{R}$
2. $m := \min\{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\}$
3. $x < m \leq x + 1$ (único inteiro nesse intervalo)
4. $(x + 1) - 1 < m \leq (x + 1)$
5. $m = \lfloor x + 1 \rfloor$ (T. 8)

# Teorema 13

$$\min \{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\} = \lfloor x \rfloor + 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Demonstração.

1. $x \in \mathbb{R}$
2. $m := \min \{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\}$
3. $x < m \leq x + 1$ (único inteiro nesse intervalo)
4. $(x + 1) - 1 < m \leq (x + 1)$
5. $m = \lfloor x + 1 \rfloor$ (T. 8)
6. $m = \lfloor x \rfloor + 1$ (T. 10)

$\square$

# Teorema 14

# Teorema 14

$$\max\{k \in \mathbb{Z} \mid k < x\} = \lceil x - 1 \rceil$$

# Teorema 14

$$\max\{k \in \mathbb{Z} \mid k < x\} = \lceil x - 1 \rceil\,,\ \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

# Teorema 14

$$\max\{k \in \mathbb{Z} \mid k < x\} = \lceil x - 1 \rceil, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Demonstração.

Exercício 35 $\square$