

Matemática Discreta

Unidade 6: Piso e Teto (2)

Renato Carmo

David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Função integralizada

Função integralizada

$$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Função integralizada

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **integralizada** em D

Função integralizada

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **integralizada** em D

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}$$

Função integralizada

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **integralizada** em D

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

Função integralizada

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **integralizada** em D

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

1. $f(x) = x/2$ é integralizada em \mathbb{R} ?

Função integralizada

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **integralizada** em D

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

1. $f(x) = x/2$ é integralizada em \mathbb{R} ?
sim

Função integralizada

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **integralizada** em D

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

1. $f(x) = x/2$ é integralizada em \mathbb{R} ?

sim:

$$x/2 \in \mathbb{Z}$$

Função integralizada

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **integralizada** em D

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

1. $f(x) = x/2$ é integralizada em \mathbb{R} ?

sim:

$$x/2 \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}$$

Função integralizada

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **integralizada** em D

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

1. $f(x) = x/2$ é integralizada em \mathbb{R} ?

sim:

$$x/2 \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Função integralizada

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **integralizada** em D

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

1. $f(x) = x/2$ é integralizada em \mathbb{R} ?

sim:

2. $f(x) = 2x$ é integralizada em \mathbb{R} ?

$$x/2 \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Função integralizada

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **integralizada** em D

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

1. $f(x) = x/2$ é integralizada em \mathbb{R} ?

sim:

2. $f(x) = 2x$ é integralizada em \mathbb{R} ?

não

$$x/2 \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Função integralizada

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **integralizada** em D

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

1. $f(x) = x/2$ é integralizada em \mathbb{R} ?

sim:

$$x/2 \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

2. $f(x) = 2x$ é integralizada em \mathbb{R} ?

não:

$$f(1/2)$$

Função integralizada

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **integralizada** em D

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

1. $f(x) = x/2$ é integralizada em \mathbb{R} ?

sim:

$$x/2 \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

2. $f(x) = 2x$ é integralizada em \mathbb{R} ?

não:

$$f(1/2) = 2(1/2)$$

Função integralizada

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **integralizada** em D

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

1. $f(x) = x/2$ é integralizada em \mathbb{R} ?

sim:

$$x/2 \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

2. $f(x) = 2x$ é integralizada em \mathbb{R} ?

não:

$$f(1/2) = 2(1/2) = 1$$

Função integralizada

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **integralizada** em D

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

1. $f(x) = x/2$ é integralizada em \mathbb{R} ?

sim:

$$x/2 \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

2. $f(x) = 2x$ é integralizada em \mathbb{R} ?

não:

$$f(1/2) = 2(1/2) = 1 \in \mathbb{Z}$$

Função integralizada

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **integralizada** em D

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

1. $f(x) = x/2$ é integralizada em \mathbb{R} ?

sim:

$$x/2 \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

2. $f(x) = 2x$ é integralizada em \mathbb{R} ?

não:

$$f(1/2) = 2(1/2) = 1 \in \mathbb{Z}, \text{ mas } 1/2 \notin \mathbb{Z}$$

Função integralizada

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **integralizada** em D

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

1. $f(x) = x/2$ é integralizada em \mathbb{R} ?

sim:

$$x/2 \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

2. $f(x) = 2x$ é integralizada em \mathbb{R} ?

não:

$$f(1/2) = 2(1/2) = 1 \in \mathbb{Z}, \text{ mas } 1/2 \notin \mathbb{Z}$$

3. $f(x) = \sqrt{x}$ é integralizada em $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$?

Função integralizada

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **integralizada** em D

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

1. $f(x) = x/2$ é integralizada em \mathbb{R} ?

sim:

$$x/2 \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

2. $f(x) = 2x$ é integralizada em \mathbb{R} ?

não:

$$f(1/2) = 2(1/2) = 1 \in \mathbb{Z}, \text{ mas } 1/2 \notin \mathbb{Z}$$

3. $f(x) = \sqrt{x}$ é integralizada em $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$?

sim

Função integralizada

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **integralizada** em D

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

1. $f(x) = x/2$ é integralizada em \mathbb{R} ?

sim:

$$x/2 \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

2. $f(x) = 2x$ é integralizada em \mathbb{R} ?

não:

$$f(1/2) = 2(1/2) = 1 \in \mathbb{Z}, \text{ mas } 1/2 \notin \mathbb{Z}$$

3. $f(x) = \sqrt{x}$ é integralizada em $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$?

sim:

$$\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$$

Função integralizada

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **integralizada** em D

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

1. $f(x) = x/2$ é integralizada em \mathbb{R} ?

sim:

$$x/2 \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

2. $f(x) = 2x$ é integralizada em \mathbb{R} ?

não:

$$f(1/2) = 2(1/2) = 1 \in \mathbb{Z}, \text{ mas } 1/2 \notin \mathbb{Z}$$

3. $f(x) = \sqrt{x}$ é integralizada em $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$?

sim:

$$\sqrt{x} \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}$$

Função integralizada

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **integralizada** em D

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

1. $f(x) = x/2$ é integralizada em \mathbb{R} ?

sim:

$$x/2 \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

2. $f(x) = 2x$ é integralizada em \mathbb{R} ?

não:

$$f(1/2) = 2(1/2) = 1 \in \mathbb{Z}, \text{ mas } 1/2 \notin \mathbb{Z}$$

3. $f(x) = \sqrt{x}$ é integralizada em $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$?

sim:

$$\sqrt{x} \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

Função integralizada

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **integralizada** em D

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

1. $f(x) = x/2$ é integralizada em \mathbb{R} ?

sim:

$$x/2 \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

2. $f(x) = 2x$ é integralizada em \mathbb{R} ?

não:

$$f(1/2) = 2(1/2) = 1 \in \mathbb{Z}, \text{ mas } 1/2 \notin \mathbb{Z}$$

3. $f(x) = \sqrt{x}$ é integralizada em $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$?

sim:

$$\sqrt{x} \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

4. $f(x) = \lg x$ é integralizada em $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$?

Função integralizada

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **integralizada** em D

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

1. $f(x) = x/2$ é integralizada em \mathbb{R} ?

sim:

$$x/2 \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

2. $f(x) = 2x$ é integralizada em \mathbb{R} ?

não:

$$f(1/2) = 2(1/2) = 1 \in \mathbb{Z}, \text{ mas } 1/2 \notin \mathbb{Z}$$

3. $f(x) = \sqrt{x}$ é integralizada em $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$?

sim:

$$\sqrt{x} \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

4. $f(x) = \lg x$ é integralizada em $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$?

sim

Função integralizada

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **integralizada** em D

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

1. $f(x) = x/2$ é integralizada em \mathbb{R} ?

sim:

$$x/2 \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

2. $f(x) = 2x$ é integralizada em \mathbb{R} ?

não:

$$f(1/2) = 2(1/2) = 1 \in \mathbb{Z}, \text{ mas } 1/2 \notin \mathbb{Z}$$

3. $f(x) = \sqrt{x}$ é integralizada em $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$?

sim:

$$\sqrt{x} \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

4. $f(x) = \lg x$ é integralizada em $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$?

sim:

$$\lg x \in \mathbb{Z}$$

Função integralizada

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **integralizada** em D

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

1. $f(x) = x/2$ é integralizada em \mathbb{R} ?

sim:

$$x/2 \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

2. $f(x) = 2x$ é integralizada em \mathbb{R} ?

não:

$$f(1/2) = 2(1/2) = 1 \in \mathbb{Z}, \text{ mas } 1/2 \notin \mathbb{Z}$$

3. $f(x) = \sqrt{x}$ é integralizada em $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$?

sim:

$$\sqrt{x} \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

4. $f(x) = \lg x$ é integralizada em $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$?

sim:

$$\lg x \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}$$

Função integralizada

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **integralizada** em D

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

1. $f(x) = x/2$ é integralizada em \mathbb{R} ?

sim:

$$x/2 \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

2. $f(x) = 2x$ é integralizada em \mathbb{R} ?

não:

$$f(1/2) = 2(1/2) = 1 \in \mathbb{Z}, \text{ mas } 1/2 \notin \mathbb{Z}$$

3. $f(x) = \sqrt{x}$ é integralizada em $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$?

sim:

$$\sqrt{x} \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

4. $f(x) = \lg x$ é integralizada em $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$?

sim:

$$\lg x \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

Função integralizada

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **integralizada** em D

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

1. $f(x) = x/2$ é integralizada em \mathbb{R} ?

sim:

$$x/2 \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

2. $f(x) = 2x$ é integralizada em \mathbb{R} ?

não:

$$f(1/2) = 2(1/2) = 1 \in \mathbb{Z}, \text{ mas } 1/2 \notin \mathbb{Z}$$

3. $f(x) = \sqrt{x}$ é integralizada em $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$?

sim:

$$\sqrt{x} \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

4. $f(x) = \lg x$ é integralizada em $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$?

sim:

$$\lg x \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

5. $f(x) = \lg x$ é integralizada em \mathbb{R} ?

Função integralizada

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **integralizada** em D

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

1. $f(x) = x/2$ é integralizada em \mathbb{R} ?

sim:

$$x/2 \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

2. $f(x) = 2x$ é integralizada em \mathbb{R} ?

não:

$$f(1/2) = 2(1/2) = 1 \in \mathbb{Z}, \text{ mas } 1/2 \notin \mathbb{Z}$$

3. $f(x) = \sqrt{x}$ é integralizada em $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$?

sim:

$$\sqrt{x} \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

4. $f(x) = \lg x$ é integralizada em $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$?

sim:

$$\lg x \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

5. $f(x) = \lg x$ é integralizada em \mathbb{R} ?

não

Função integralizada

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **integralizada** em D

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

1. $f(x) = x/2$ é integralizada em \mathbb{R} ?

sim:

$$x/2 \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

2. $f(x) = 2x$ é integralizada em \mathbb{R} ?

não:

$$f(1/2) = 2(1/2) = 1 \in \mathbb{Z}, \text{ mas } 1/2 \notin \mathbb{Z}$$

3. $f(x) = \sqrt{x}$ é integralizada em $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$?

sim:

$$\sqrt{x} \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

4. $f(x) = \lg x$ é integralizada em $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$?

sim:

$$\lg x \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

5. $f(x) = \lg x$ é integralizada em \mathbb{R} ?

não:

$$f(1/2)$$

Função integralizada

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **integralizada** em D

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

1. $f(x) = x/2$ é integralizada em \mathbb{R} ?

sim:

$$x/2 \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

2. $f(x) = 2x$ é integralizada em \mathbb{R} ?

não:

$$f(1/2) = 2(1/2) = 1 \in \mathbb{Z}, \text{ mas } 1/2 \notin \mathbb{Z}$$

3. $f(x) = \sqrt{x}$ é integralizada em $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$?

sim:

$$\sqrt{x} \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

4. $f(x) = \lg x$ é integralizada em $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$?

sim:

$$\lg x \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

5. $f(x) = \lg x$ é integralizada em \mathbb{R} ?

não:

$$f(1/2) = \lg(1/2)$$

Função integralizada

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **integralizada** em D

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

1. $f(x) = x/2$ é integralizada em \mathbb{R} ?

sim:

$$x/2 \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

2. $f(x) = 2x$ é integralizada em \mathbb{R} ?

não:

$$f(1/2) = 2(1/2) = 1 \in \mathbb{Z}, \text{ mas } 1/2 \notin \mathbb{Z}$$

3. $f(x) = \sqrt{x}$ é integralizada em $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$?

sim:

$$\sqrt{x} \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

4. $f(x) = \lg x$ é integralizada em $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$?

sim:

$$\lg x \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

5. $f(x) = \lg x$ é integralizada em \mathbb{R} ?

não:

$$f(1/2) = \lg(1/2) = -1$$

Função integralizada

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **integralizada** em D

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

1. $f(x) = x/2$ é integralizada em \mathbb{R} ?

sim:

$$x/2 \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

2. $f(x) = 2x$ é integralizada em \mathbb{R} ?

não:

$$f(1/2) = 2(1/2) = 1 \in \mathbb{Z}, \text{ mas } 1/2 \notin \mathbb{Z}$$

3. $f(x) = \sqrt{x}$ é integralizada em $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$?

sim:

$$\sqrt{x} \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

4. $f(x) = \lg x$ é integralizada em $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$?

sim:

$$\lg x \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

5. $f(x) = \lg x$ é integralizada em \mathbb{R} ?

não:

$$f(1/2) = \lg(1/2) = -1 \in \mathbb{Z}$$

Função integralizada

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **integralizada** em D

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

1. $f(x) = x/2$ é integralizada em \mathbb{R} ?

sim:

$$x/2 \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

2. $f(x) = 2x$ é integralizada em \mathbb{R} ?

não:

$$f(1/2) = 2(1/2) = 1 \in \mathbb{Z}, \text{ mas } 1/2 \notin \mathbb{Z}$$

3. $f(x) = \sqrt{x}$ é integralizada em $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$?

sim:

$$\sqrt{x} \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

4. $f(x) = \lg x$ é integralizada em $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$?

sim:

$$\lg x \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D$$

5. $f(x) = \lg x$ é integralizada em \mathbb{R} ?

não:

$$f(1/2) = \lg(1/2) = -1 \in \mathbb{Z}, \text{ mas } 1/2 \notin \mathbb{Z}$$

Teorema 15

Teorema 15

$$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Teorema 15

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: integralizada

Teorema 15

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: integralizada, contínua

Teorema 15

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: integralizada, contínua e crescente em D

Teorema 15

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: integralizada, contínua e crescente em D

$$\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor$$

Teorema 15

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: integralizada, contínua e crescente em D

$$\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor \quad e \quad \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil$$

Teorema 15

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: integralizada, contínua e crescente em D

$$\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor \quad \text{e} \quad \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil, \quad \text{para todo } x \in D$$

Teorema 15

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: integralizada, contínua e crescente em D

$$\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor \quad \text{e} \quad \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil, \quad \text{para todo } x \in D$$

Demonstração.

caso $x \in \mathbb{Z}$

Teorema 15

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: integralizada, contínua e crescente em D

$$\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor \quad \text{e} \quad \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil, \quad \text{para todo } x \in D$$

Demonstração.

caso $x \in \mathbb{Z}$

- $\lfloor x \rfloor = x$

Teorema 15

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: integralizada, contínua e crescente em D

$$\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor \quad \text{e} \quad \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil, \quad \text{para todo } x \in D$$

Demonstração.

caso $x \in \mathbb{Z}$

1. $\lfloor x \rfloor = x$
2. $f(\lfloor x \rfloor) = f(x)$

Teorema 15

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: integralizada, contínua e crescente em D

$$\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor \quad \text{e} \quad \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil, \quad \text{para todo } x \in D$$

Demonstração.

caso $x \in \mathbb{Z}$

1. $\lfloor x \rfloor = x$
2. $f(\lfloor x \rfloor) = f(x)$
3. $\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor$

Teorema 15

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: integralizada, contínua e crescente em D

$$\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor \quad \text{e} \quad \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil, \quad \text{para todo } x \in D$$

Demonstração.

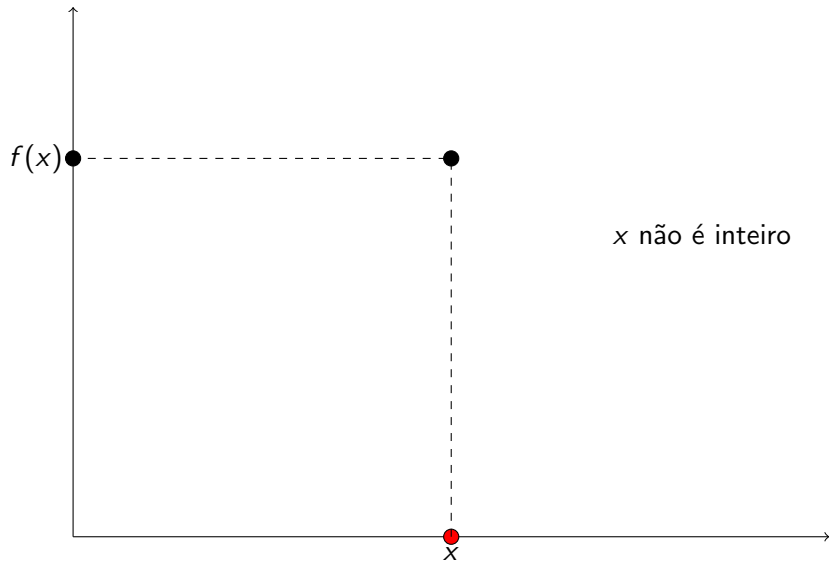
caso $x \in \mathbb{Z}$

- | | |
|--|--|
| 1. $\lfloor x \rfloor = x$ | 1. $\lceil x \rceil = x$ |
| 2. $f(\lfloor x \rfloor) = f(x)$ | 2. $f(\lceil x \rceil) = f(x)$ |
| 3. $\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor$ | 3. $\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil$ |

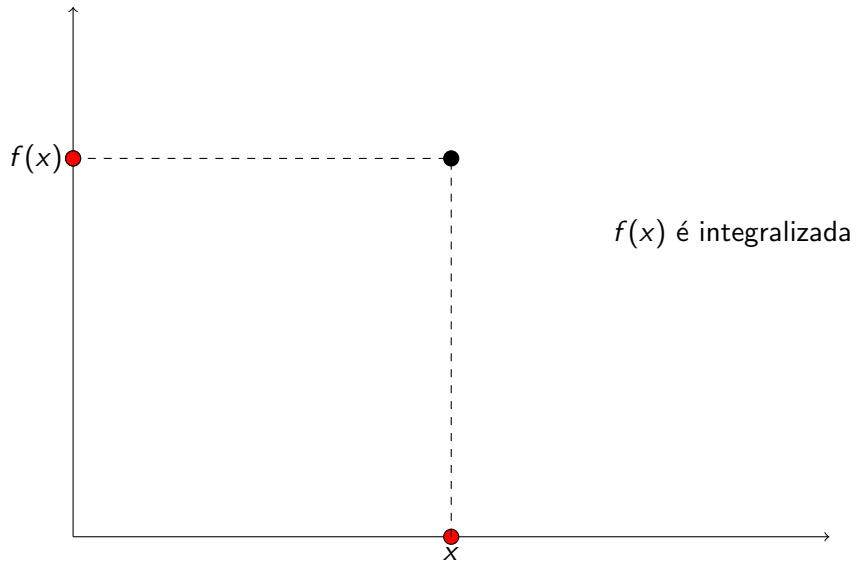


Teorema 15, caso $x \notin \mathbb{Z}$

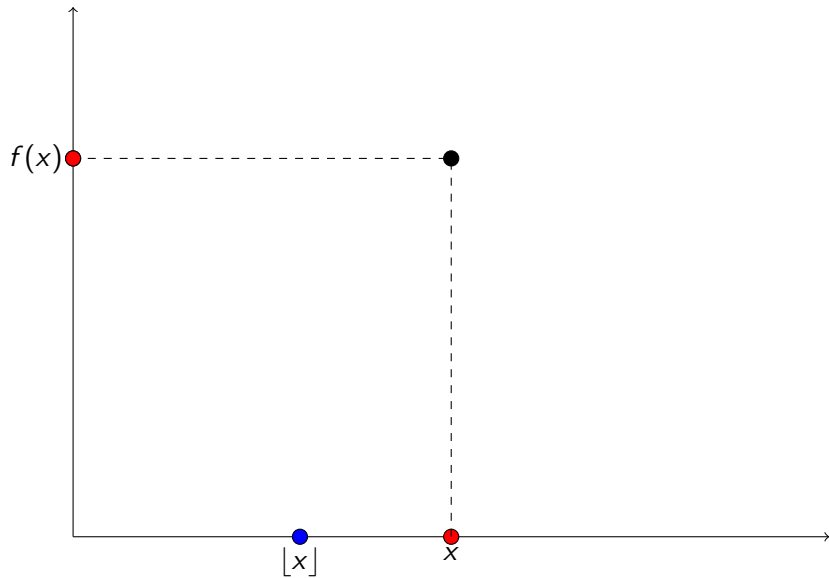
Teorema 15, caso $x \notin \mathbb{Z}$



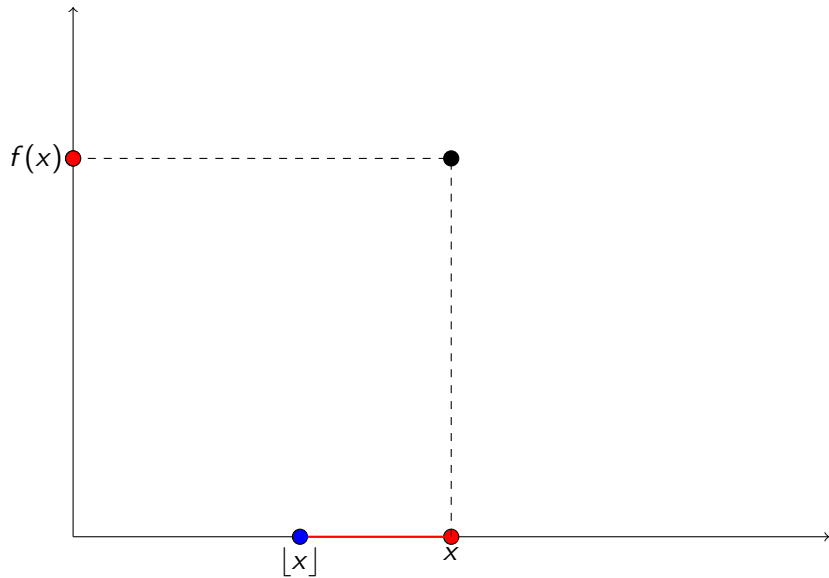
Teorema 15, caso $x \notin \mathbb{Z}$



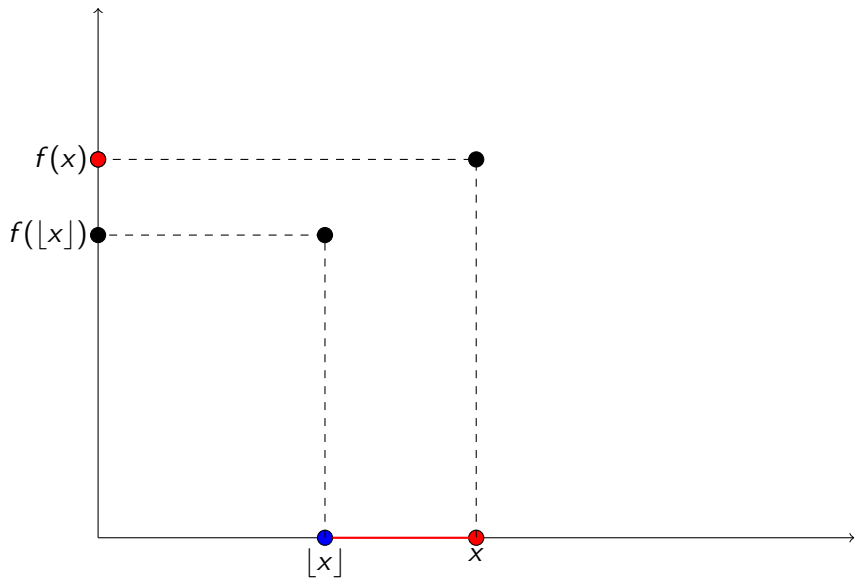
Teorema 15, caso $x \notin \mathbb{Z}$



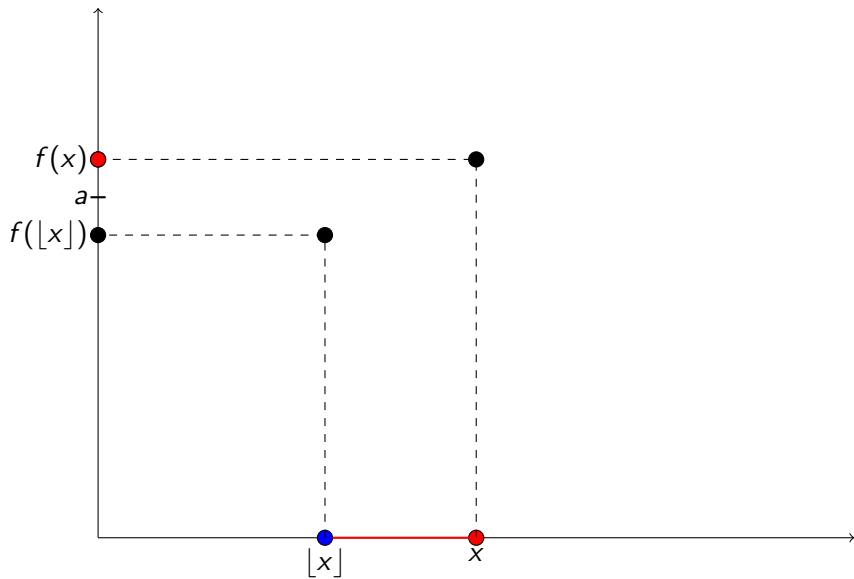
Teorema 15, caso $x \notin \mathbb{Z}$



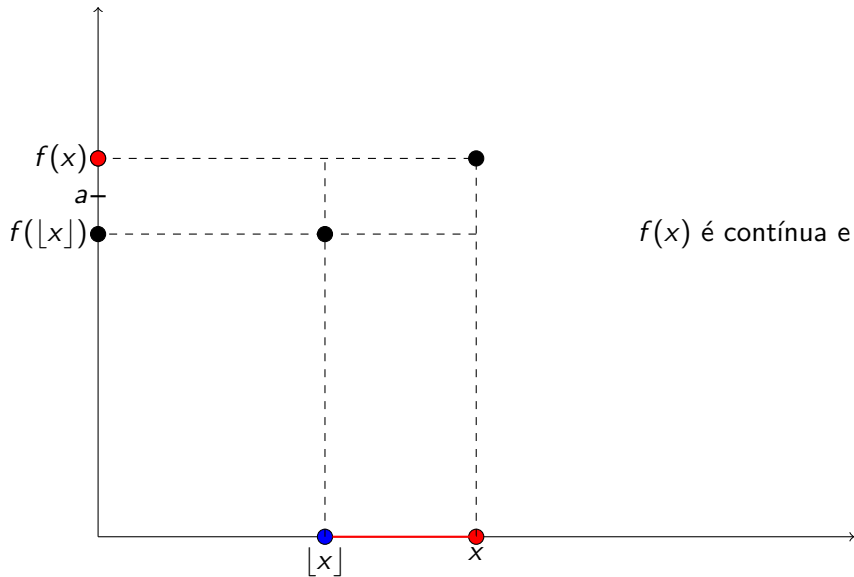
Teorema 15, caso $x \notin \mathbb{Z}$



Teorema 15, caso $x \notin \mathbb{Z}$

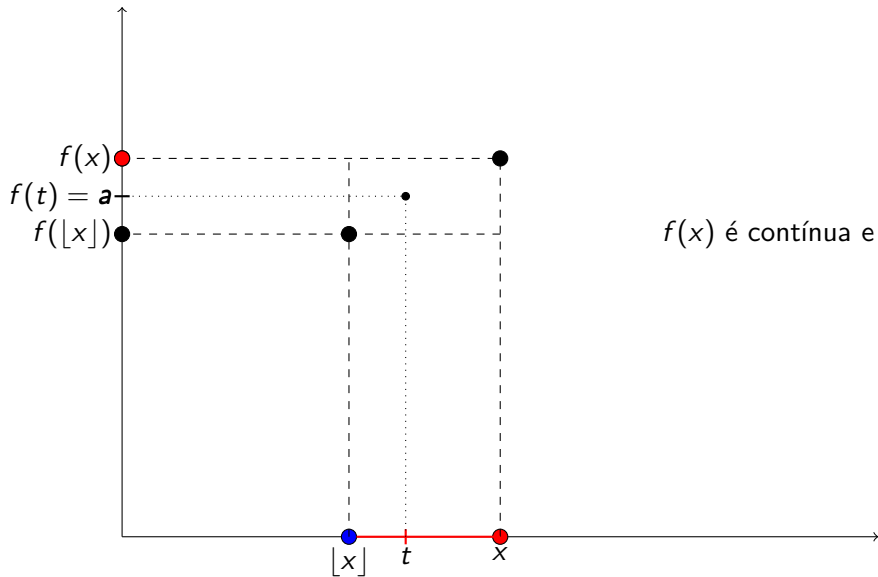


Teorema 15, caso $x \notin \mathbb{Z}$



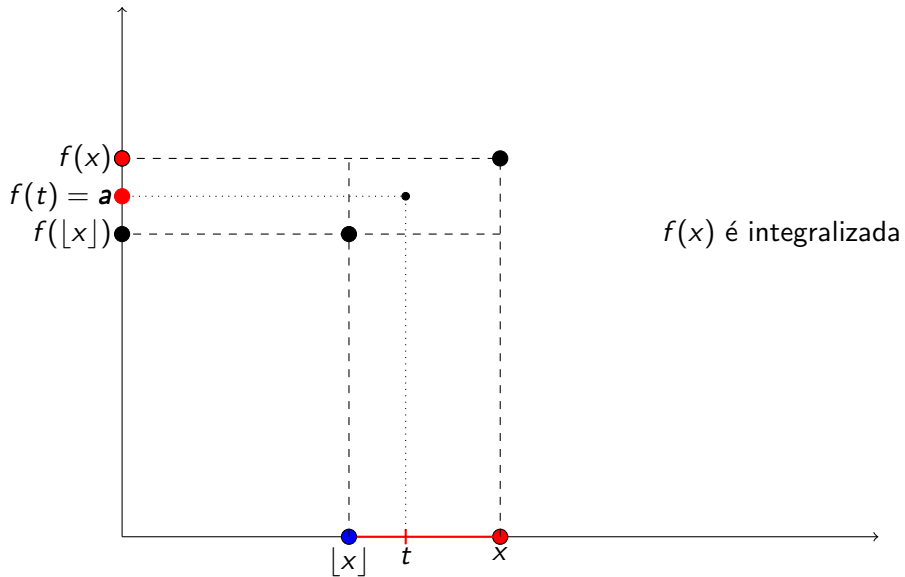
$f(x)$ é contínua e crescente

Teorema 15, caso $x \notin \mathbb{Z}$

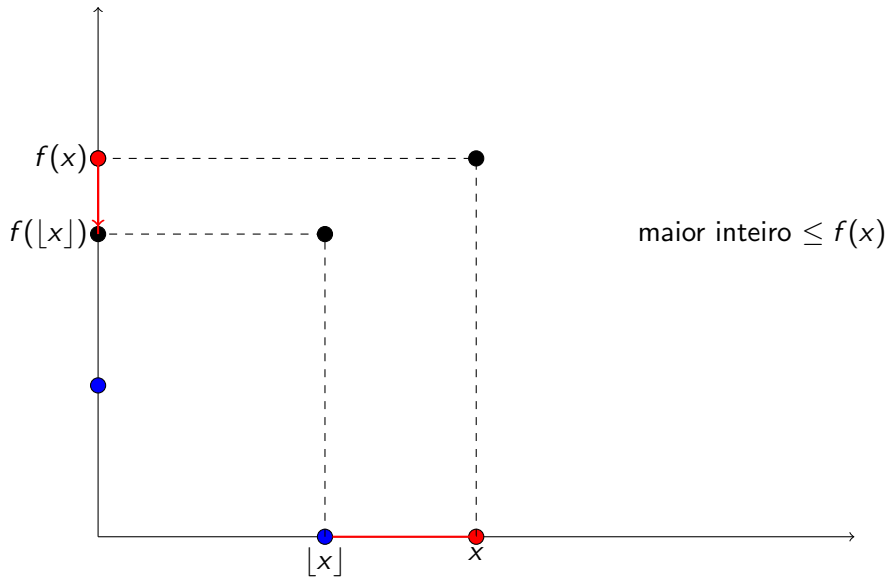


$f(x)$ é contínua e crescente

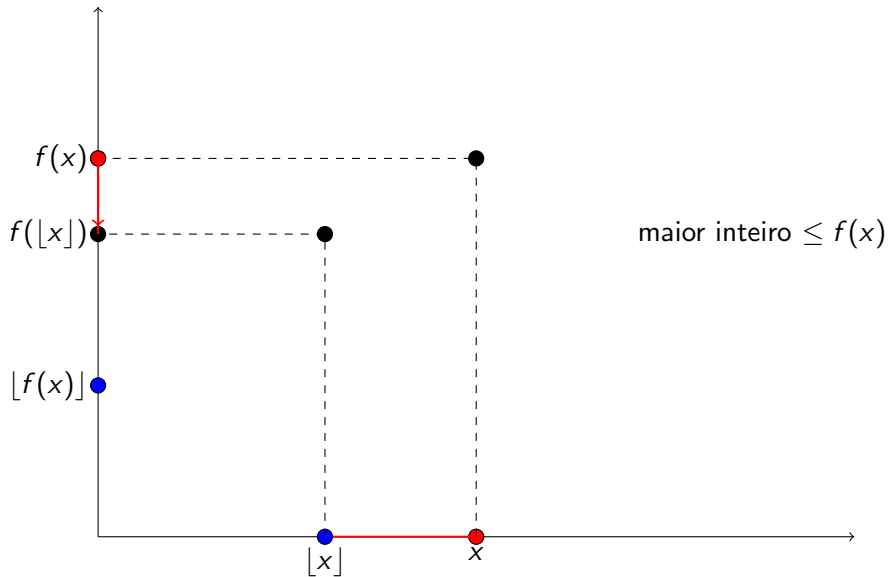
Teorema 15, caso $x \notin \mathbb{Z}$



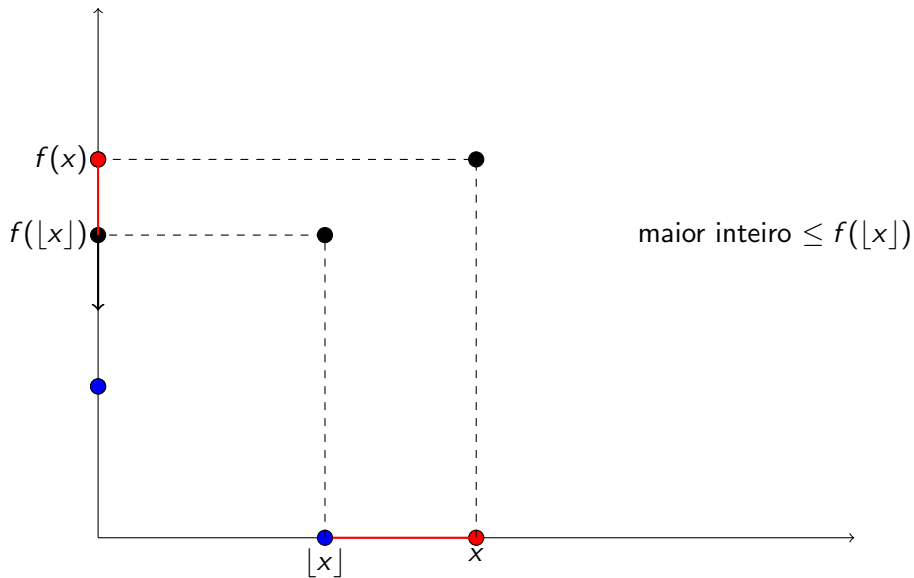
Teorema 15, caso $x \notin \mathbb{Z}$



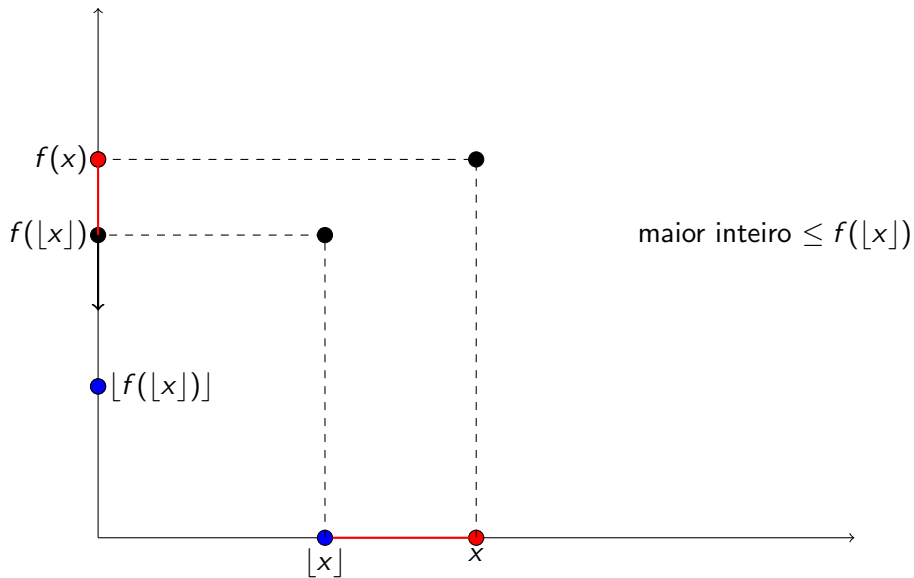
Teorema 15, caso $x \notin \mathbb{Z}$



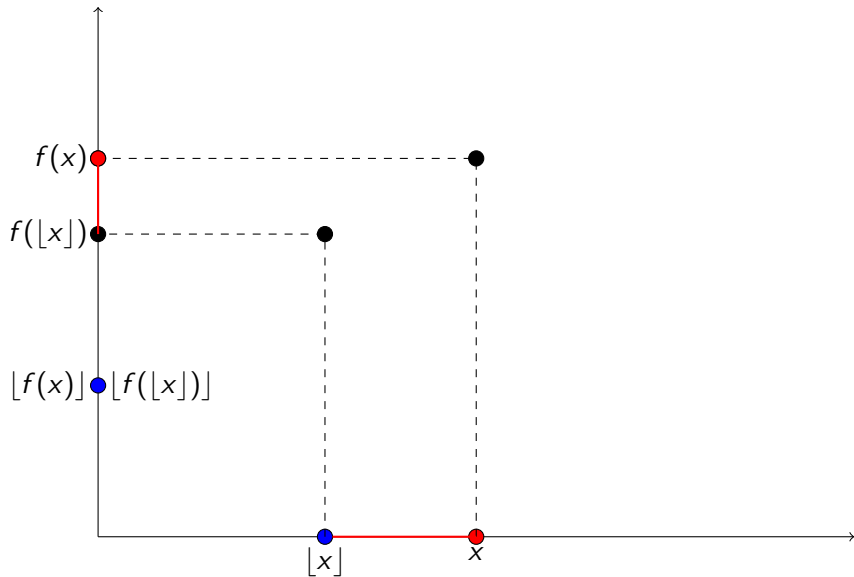
Teorema 15, caso $x \notin \mathbb{Z}$



Teorema 15, caso $x \notin \mathbb{Z}$



Teorema 15, caso $x \notin \mathbb{Z}$



Corolário 16

Corolário 16

$x \in \mathbb{R}$, k inteiro positivo

Corolário 16

$x \in \mathbb{R}$, k inteiro positivo

$$\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor$$

Corolário 16

$x \in \mathbb{R}$, k inteiro positivo

$$\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor$$

$$\left\lceil \frac{\lceil x \rceil}{k} \right\rceil = \left\lceil \frac{x}{k} \right\rceil$$

Corolário 16

$x \in \mathbb{R}$, k inteiro positivo

$$\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor$$

$$\left\lceil \frac{\lceil x \rceil}{k} \right\rceil = \left\lceil \frac{x}{k} \right\rceil$$

Demonstração.

Notas de Aula

