Matemática Discreta

Unidade 7: Princípio da Indução Finita

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Conjunto A

Conjunto A

$A \subseteq \mathbb{N}$

Conjunto A

$A \subseteq \mathbb{N}$

satisfaz

Conjunto A

$A \subseteq \mathbb{N}$

satisfaz

P_1: $0 \in A$

Conjunto A

$A \subseteq \mathbb{N}$

satisfaz

P_1: $0 \in A$

P_2: $[0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A,$ para todo $a \in \mathbb{N}$

Como é o conjunto A?

Como é o conjunto A?

P_1: $0 \in A$

P_2: $[0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A$, para todo $a \in \mathbb{N}$.

Como é o conjunto A?

P_1: $0 \in A$

P_2: $[0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A$, para todo $a \in \mathbb{N}$.

$0 \in A$

Como é o conjunto A?

P_1: $0 \in A$

P_2: $[0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A$, para todo $a \in \mathbb{N}$.

$$0 \in A \qquad (P_1)$$

Como é o conjunto A?

P_1: $0 \in A$

P_2: $[0..a] \subseteq A \implies a+1 \in A$, para todo $a \in \mathbb{N}$.

$$0 \in A \qquad (P_1)$$

$$1 \in A$$

Como é o conjunto A?

P_1: $0 \in A$

P_2: $[0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A$, para todo $a \in \mathbb{N}$.

$$0 \in A \qquad (P_1)$$

$$1 \in A \qquad ([0..0] \subseteq A$$

Como é o conjunto A?

P_1: $0 \in A$

P_2: $[0..a] \subseteq A \implies a+1 \in A$, para todo $a \in \mathbb{N}$.

$$0 \in A \qquad (P_1)$$

$$1 \in A \qquad ([0..0] \subseteq A \text{ e } P_2)$$

Como é o conjunto A?

P_1: $0 \in A$

P_2: $[0..a] \subseteq A \implies a+1 \in A$, para todo $a \in \mathbb{N}$.

$$0 \in A \qquad (P_1)$$

$$1 \in A \qquad ([0..0] \subseteq A \text{ e } P_2)$$

$$2 \in A$$

Como é o conjunto A?

P_1: $0 \in A$

P_2: $[0..a] \subseteq A \implies a+1 \in A$, para todo $a \in \mathbb{N}$.

$$0 \in A \qquad (P_1)$$

$$1 \in A \qquad ([0..0] \subseteq A \text{ e } P_2)$$

$$2 \in A \qquad ([0..1] \subseteq A$$

Como é o conjunto A?

P_1: $0 \in A$

P_2: $[0..a] \subseteq A \implies a+1 \in A$, para todo $a \in \mathbb{N}$.

$$0 \in A \qquad (P_1)$$

$$1 \in A \qquad ([0..0] \subseteq A \text{ e } P_2)$$

$$2 \in A \qquad ([0..1] \subseteq A \text{ e } P_2)$$

Como é o conjunto A?

P_1: $0 \in A$

P_2: $[0..a] \subseteq A \implies a+1 \in A$, para todo $a \in \mathbb{N}$.

$$0 \in A \qquad (P_1)$$

$$1 \in A \qquad ([0..0] \subseteq A \text{ e } P_2)$$

$$2 \in A \qquad ([0..1] \subseteq A \text{ e } P_2)$$

$$3 \in A$$

Como é o conjunto A?

P_1: $0 \in A$

P_2: $[0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A$, para todo $a \in \mathbb{N}$.

$$
\begin{aligned}
&0 \in A && (P_1) \\
&1 \in A && ([0..0] \subseteq A \text{ e } P_2) \\
&2 \in A && ([0..1] \subseteq A \text{ e } P_2) \\
&3 \in A && ([0..2] \subseteq A
\end{aligned}
$$

Como é o conjunto A?

P_1: $0 \in A$

P_2: $[0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A,$ para todo $a \in \mathbb{N}$.

$$0 \in A \qquad (P_1)$$

$$1 \in A \qquad ([0..0] \subseteq A \text{ e } P_2)$$

$$2 \in A \qquad ([0..1] \subseteq A \text{ e } P_2)$$

$$3 \in A \qquad ([0..2] \subseteq A \text{ e } P_2)$$

Como é o conjunto A?

P_1: $0 \in A$

P_2: $[0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A$, para todo $a \in \mathbb{N}$.

$$
\begin{aligned}
&0 \in A && (P_1)\\
&1 \in A && ([0..0] \subseteq A \text{ e } P_2)\\
&2 \in A && ([0..1] \subseteq A \text{ e } P_2)\\
&3 \in A && ([0..2] \subseteq A \text{ e } P_2)\\
&\dots && \dots
\end{aligned}
$$

Como é o conjunto A?

P_1: $0 \in A$

P_2: $[0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A$, para todo $a \in \mathbb{N}$.

$$
\begin{aligned}
&0 \in A && (P_1)\\
&1 \in A && ([0..0] \subseteq A \text{ e } P_2)\\
&2 \in A && ([0..1] \subseteq A \text{ e } P_2)\\
&3 \in A && ([0..2] \subseteq A \text{ e } P_2)\\
&\dots && \dots\\
&6.02 \times 10^{23} \in A &&
\end{aligned}
$$

Como é o conjunto A?

P_1: $0 \in A$

P_2: $[0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A$, para todo $a \in \mathbb{N}$.

$$
\begin{array}{ll}
0 \in A & (P_1) \\
1 \in A & ([0..0] \subseteq A \text{ e } P_2) \\
2 \in A & ([0..1] \subseteq A \text{ e } P_2) \\
3 \in A & ([0..2] \subseteq A \text{ e } P_2) \\
\ldots & \ldots \\
6.02 \times 10^{23} \in A & ([0..6.02 \times 10^{23} - 1] \subseteq A
\end{array}
$$

Como é o conjunto A?

P_1: $0 \in A$

P_2: $[0..a] \subseteq A \implies a+1 \in A$, para todo $a \in \mathbb{N}$.

$$
\begin{array}{lr}
0 \in A & (P_1) \\
1 \in A & ([0..0] \subseteq A \text{ e } P_2) \\
2 \in A & ([0..1] \subseteq A \text{ e } P_2) \\
3 \in A & ([0..2] \subseteq A \text{ e } P_2) \\
\ldots & \ldots \\
6.02 \times 10^{23} \in A & ([0..6.02 \times 10^{23} - 1] \subseteq A \text{ e } P_2)
\end{array}
$$

Como é o conjunto A?

P_1: $0 \in A$

P_2: $[0..a] \subseteq A \implies a+1 \in A,$ para todo $a \in \mathbb{N}$.

$$
\begin{aligned}
&0 \in A && (P_1) \\
&1 \in A && ([0..0] \subseteq A \text{ e } P_2) \\
&2 \in A && ([0..1] \subseteq A \text{ e } P_2) \\
&3 \in A && ([0..2] \subseteq A \text{ e } P_2) \\
&\dots && \dots \\
&6.02 \times 10^{23} \in A && ([0..6.02 \times 10^{23} - 1] \subseteq A \text{ e } P_2) \\
&\dots && \dots
\end{aligned}
$$

Como é o conjunto A?

P_1: $0 \in A$

P_2: $[0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A$, para todo $a \in \mathbb{N}$.

$$
\begin{array}{ll}
0 \in A & (P_1) \\
1 \in A & ([0..0] \subseteq A \text{ e } P_2) \\
2 \in A & ([0..1] \subseteq A \text{ e } P_2) \\
3 \in A & ([0..2] \subseteq A \text{ e } P_2) \\
\ldots & \ldots \\
6.02 \times 10^{23} \in A & ([0..6.02 \times 10^{23} - 1] \subseteq A \text{ e } P_2) \\
\ldots & \ldots
\end{array}
$$

$$A = \mathbb{N}$$

$n \in A$?

$n \in A$?

Sim

$n \in A$?

Sim, porque

$$1: \; 0 \in A \qquad (P_1)$$

$n \in A$?

Sim, porque

1: $0 \in A$ (P_1)

2: $1 \in A$ $([0..0] \subseteq A$

$n \in A$?

Sim, porque

1: $0 \in A$ $\quad (P_1)$

2: $1 \in A$ $\quad ([0..0] \subseteq A \text{ e } P_2)$

$n \in A$?

Sim, porque

1: $0 \in A$ (P_1)

2: $1 \in A$ $([0..0] \subseteq A \text{ e } P_2)$

3: $2 \in A$

$n \in A$?

Sim, porque

1: $0 \in A$ (P_1)

2: $1 \in A$ $([0..0] \subseteq A$ e $P_2)$

3: $2 \in A$ $([0..1] \subseteq A$

$n \in A$?

Sim, porque

1: $0 \in A$ (P_1)

2: $1 \in A$ $([0..0] \subseteq A \text{ e } P_2)$

3: $2 \in A$ $([0..1] \subseteq A \text{ e } P_2)$

$n \in A$?

Sim, porque

1: $0 \in A$ (P_1)

2: $1 \in A$ $([0..0] \subseteq A \text{ e } P_2)$

3: $2 \in A$ $([0..1] \subseteq A \text{ e } P_2)$

$\ldots$

$n \in A$?

Sim, porque

1:	$0 \in A$	(P_1)
2:	$1 \in A$	$([0..0] \subseteq A$ e $P_2)$
3:	$2 \in A$	$([0..1] \subseteq A$ e $P_2)$
	$\ldots$	
n+1:	$n \in A$	

$n \in A$?

Sim, porque

$$
\begin{array}{rll}
1: & 0 \in A & (P_1) \\
2: & 1 \in A & ([0..0] \subseteq A \text{ e } P_2) \\
3: & 2 \in A & ([0..1] \subseteq A \text{ e } P_2) \\
 & \cdots & \\
\text{n+1}: & n \in A & ([0..n-1] \subseteq A
\end{array}
$$

$n \in A$?

Sim, porque

$$
\begin{array}{rll}
1: & 0 \in A & (P_1) \\
2: & 1 \in A & ([0..0] \subseteq A \text{ e } P_2) \\
3: & 2 \in A & ([0..1] \subseteq A \text{ e } P_2) \\
 & \ldots & \\
\text{n+1}: & n \in A & ([0..n-1] \subseteq A \text{ e } P_2)
\end{array}
$$

Moral da História

Moral da História

Se $A \subseteq \mathbb{N}$

Moral da História

Se $A \subseteq \mathbb{N}$ satisfaz

1. $0 \in A$

Moral da História

Se $A \subseteq \mathbb{N}$ satisfaz

1. $0 \in A$ e,
2. $[0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A$, para todo $a \in \mathbb{N}$

Moral da História

Se $A \subseteq \mathbb{N}$ satisfaz

1. $0 \in A$ e,
2. $[0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A$, para todo $a \in \mathbb{N}$

então

Moral da História

Se $A \subseteq \mathbb{N}$ satisfaz

1. $0 \in A$ e,
2. $[0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A$, para todo $a \in \mathbb{N}$

então

$$A = \mathbb{N}$$

Princípio da Indução Finita

Se $A \subseteq \mathbb{N}$ satisfaz

1. $0 \in A$ e,
2. $[0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A$, para todo $a \in \mathbb{N}$

então

$$A = \mathbb{N}$$

Princípio da Indução Finita

Se $A \subseteq \mathbb{N}$ satisfaz

1. $0 \in A$ e,
2. $[0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A$, para todo $a \in \mathbb{N}$

então

$$A = \mathbb{N}$$

existe uma prova finita de que $n \in A$

Princípio da Indução Finita

Se $A \subseteq \mathbb{N}$ satisfaz

1. $0 \in A$ e,
2. $[0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A$, para todo $a \in \mathbb{N}$

então

$$A = \mathbb{N}$$

existe uma prova finita de que $n \in A$ ($n + 1$ passos)