# Matemática Discreta

## Unidade 9: Demonstração por Indução (2)

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

# Resumo da Unidade 8: prova do Teorema 17

# Resumo da Unidade 8: prova do Teorema 17

Teorema 17: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$

# Resumo da Unidade 8: prova do Teorema 17

Teorema 17: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Teorema 17: proposição $P(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

# Resumo da Unidade 8: prova do Teorema 17

Teorema 17: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Teorema 17: proposição $P(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$P(n): \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

# Resumo da Unidade 8: prova do Teorema 17

Teorema 17: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Teorema 17: proposição $P(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$P(n): \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$A = \{k \in \mathbb{N} \mid P(k) \text{ é verdadeira}\}$

# Resumo da Unidade 8: prova do Teorema 17

Teorema 17: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Teorema 17: proposição $P(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

$P(n)$: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

$A = \{k \in \mathbb{N} \mid P(k) \text{ é verdadeira}\}$

prova de que $A = \mathbb{N}$

# Resumo da Unidade 8: prova do Teorema 17

Teorema 17: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Teorema 17: proposição $P(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$P(n): \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$A = \{k \in \mathbb{N} \mid P(k) \text{ é verdadeira}\}$

prova de que $A = \mathbb{N}$ usando o Princípio da Indução Finita

# Resumo da Unidade 8: prova do Teorema 17

Teorema 17: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Teorema 17: proposição $P(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$P(n): \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$A = \{k \in \mathbb{N} \mid P(k) \text{ é verdadeira}\}$

prova de que $A = \mathbb{N}$ usando o Princípio da Indução Finita:

1. prova de que $0 \in A$

# Resumo da Unidade 8: prova do Teorema 17

Teorema 17: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Teorema 17: proposição $P(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$P(n): \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$A = \{k \in \mathbb{N} \mid P(k) \text{ é verdadeira}\}$

prova de que $A = \mathbb{N}$ usando o Princípio da Indução Finita:

1. prova de que $0 \in A$ e,
2. prova de que $[0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A$, para todo $a \in \mathbb{N}$

# Prova por Indução: esquema

# Prova por Indução: esquema

$P(n)$

# Prova por Indução: esquema

$P(n)$: predicado

# Prova por Indução: esquema

$P(n)$: predicado

**Proposição:** $P(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

# Prova por Indução: esquema

$P(n)$: predicado

**Proposição:** $P(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Demonstração.

1. $A := \{k \in \mathbb{N} \mid P(k) \text{ é verdadeira}\}$

# Prova por Indução: esquema

$P(n)$: predicado

**Proposição:** $P(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Demonstração.

1. $A := \{k \in \mathbb{N} \mid P(k) \text{ é verdadeira}\}$
2. provar que $A = \mathbb{N}$

# Prova por Indução: esquema

$P(n)$: predicado

**Proposição:** $P(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Demonstração.

1. $A := \{k \in \mathbb{N} \mid P(k) \text{ é verdadeira}\}$
2. provar que $A = \mathbb{N}$, provando que
   2.1 $A := \{k \in \mathbb{N} \mid P(k) \text{ é verdadeira}\}$

## Prova por Indução: esquema

$P(n)$: predicado

**Proposição:** $P(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Demonstração.

1. $A := \{k \in \mathbb{N} \mid P(k) \text{ é verdadeira}\}$
2. provar que $A = \mathbb{N}$, provando que
   2.1 $A := \{k \in \mathbb{N} \mid P(k) \text{ é verdadeira}\}$
   2.2 Vamos provar que $A = \mathbb{N}$

# Prova por Indução: esquema

$P(n)$: predicado
**Proposição:** $P(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Demonstração.

1. $A := \{k \in \mathbb{N} \mid P(k) \text{ é verdadeira}\}$
2. provar que $A = \mathbb{N}$, provando que

   2.1 $A := \{k \in \mathbb{N} \mid P(k) \text{ é verdadeira}\}$
   2.2 Vamos provar que $A = \mathbb{N}$, provando que

      2.2.1 $0 \in A$

# Prova por Indução: esquema

$P(n)$: predicado

**Proposição:** $P(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Demonstração.

1. $A := \{k \in \mathbb{N} \mid P(k) \text{ é verdadeira}\}$
2. provar que $A = \mathbb{N}$, provando que

    2.1 $A := \{k \in \mathbb{N} \mid P(k) \text{ é verdadeira}\}$

    2.2 Vamos provar que $A = \mathbb{N}$, provando que

        2.2.1 $0 \in A$

        2.2.2 $[0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A$, para todo $a \in \mathbb{N}$.

$\square$

# Prova por Indução: esquema

$P(n)$: predicado

**Proposição:** $P(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Demonstração.

1. $A := \{k \in \mathbb{N} \mid P(k) \text{ é verdadeira}\}$
2. provar que $A = \mathbb{N}$, provando que

   2.1 $A := \{k \in \mathbb{N} \mid P(k) \text{ é verdadeira}\}$

   2.2 Vamos provar que $A = \mathbb{N}$, provando que

      2.2.1 $0 \in A$

      2.2.2 $[0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A$, para todo $a \in \mathbb{N}$.

□

---

1. $0 \in A$

# Prova por Indução: esquema

$P(n)$: predicado
**Proposição:** $P(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Demonstração.

1. $A := \{k \in \mathbb{N} \mid P(k) \text{ é verdadeira}\}$
2. provar que $A = \mathbb{N}$, provando que
   2.1 $A := \{k \in \mathbb{N} \mid P(k) \text{ é verdadeira}\}$
   2.2 Vamos provar que $A = \mathbb{N}$, provando que
      2.2.1 $0 \in A$
      2.2.2 $[0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A$, para todo $a \in \mathbb{N}$.

$\square$

---

1. $0 \in A$ $\qquad$ $P(0)$ é verdadeira

# Prova por Indução: esquema

$P(n)$: predicado

**Proposição:** $P(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Demonstração.

1. $A := \{k \in \mathbb{N} \mid P(k) \text{ é verdadeira}\}$
2. provar que $A = \mathbb{N}$, provando que
    2.1 $A := \{k \in \mathbb{N} \mid P(k) \text{ é verdadeira}\}$
    2.2 Vamos provar que $A = \mathbb{N}$, provando que
        2.2.1 $0 \in A$
        2.2.2 $[0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A$, para todo $a \in \mathbb{N}$.

$\square$

---

1. $0 \in A$ — $P(0)$ é verdadeira
2. $[0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A$

# Prova por Indução: esquema

$P(n)$: predicado
**Proposição:** $P(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Demonstração.

1. $A := \{k \in \mathbb{N} \mid P(k) \text{ é verdadeira}\}$
2. provar que $A = \mathbb{N}$, provando que

   2.1 $A := \{k \in \mathbb{N} \mid P(k) \text{ é verdadeira}\}$
   2.2 Vamos provar que $A = \mathbb{N}$, provando que

      2.2.1 $0 \in A$
      2.2.2 $[0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A$, para todo $a \in \mathbb{N}$.

$\square$

---

1. $0 \in A$ — $P(0)$ é verdadeira
2. $[0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A$ — $P(k)$, para todo $k \in [0..a] \implies P(a+1)$

# Prova por Indução: sem o conjunto $A$

**Proposição:** $P(n),$ para todo $n \in \mathbb{N}$

# Prova por Indução: sem o conjunto $A$

**Proposição:** $P(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Demonstração.

Vamos provar que $P(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, provando que

# Prova por Indução: sem o conjunto $A$

**Proposição:** $P(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Demonstração.

Vamos provar que $P(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, provando que

1. $P(0)$

# Prova por Indução: sem o conjunto $A$

**Proposição:** $P(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Demonstração.

Vamos provar que $P(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, provando que

1. $P(0)$
2. $P(k)$, para todo $k \in [0..a] \implies P(a+1)$, para todo $a \in \mathbb{N}$

$\square$

# Prova por Indução: esquema

# Prova por Indução: esquema

1: Provar que $P(0)$

# Prova por Indução: esquema

1: Provar que $P(0)$

$$\vdots$$

# Prova por Indução: esquema

1: Provar que $P(0)$

$$\vdots$$

"Portanto, $P(0)$ é verdadeira"

# Prova por Indução: esquema

1: Provar que $P(0)$

$$\vdots$$

"Portanto, $P(0)$ é verdadeira"

2: Provar que $P(k)$, para todo $k \in [0..a] \implies P(a+1)$, para todo $a \in \mathbb{N}$

# Prova por Indução: esquema

1: Provar que $P(0)$

$$\vdots$$

"Portanto, $P(0)$ é verdadeira"

2: Provar que $P(k), \text{ para todo } k \in [0..a] \implies P(a+1), \text{ para todo } a \in \mathbb{N}$

1: Tomar $a \in \mathbb{N}$ tal que $P(k), \text{ para todo } k \in [0..a]$

# Prova por Indução: esquema

1: Provar que $P(0)$

$$\vdots$$

"Portanto, $P(0)$ é verdadeira"

2: Provar que $P(k)$, para todo $k \in [0..a] \implies P(a+1)$, para todo $a \in \mathbb{N}$

  1: Tomar $a \in \mathbb{N}$ tal que $P(k)$, para todo $k \in [0..a]$

  2: Provar que $P(a+1)$

# Prova por Indução: esquema

1: Provar que $P(0)$

$$\vdots$$

"Portanto, $P(0)$ é verdadeira"

2: Provar que $P(k),\ \text{para todo } k \in [0..a] \implies P(a+1),\ \text{para todo } a \in \mathbb{N}$

   1: Tomar $a \in \mathbb{N}$ tal que $P(k),\ \text{para todo } k \in [0..a]$

   2: Provar que $P(a+1)$

$$\vdots$$

# Prova por Indução: esquema

1: Provar que $P(0)$

$$\vdots$$

"Portanto, $P(0)$ é verdadeira"

2: Provar que $P(k)$, para todo $k \in [0..a] \implies P(a+1)$, para todo $a \in \mathbb{N}$

1: Tomar $a \in \mathbb{N}$ tal que $P(k)$, para todo $k \in [0..a]$

2: Provar que $P(a+1)$

$$\vdots$$

"Como $P(k)$, para todo $k \in [0..a]$ ..."

# Prova por Indução: esquema

1: Provar que $P(0)$

$$\vdots$$

"Portanto, $P(0)$ é verdadeira"

2: Provar que $P(k)$, para todo $k \in [0..a] \implies P(a+1)$, para todo $a \in \mathbb{N}$

  1: Tomar $a \in \mathbb{N}$ tal que $P(k)$, para todo $k \in [0..a]$

  2: Provar que $P(a+1)$

  $$\vdots$$

  "Como $P(k)$, para todo $k \in [0..a]$ ..."

  $$\vdots$$

# Prova por Indução: esquema

1: Provar que $P(0)$

$$\vdots$$

"Portanto, $P(0)$ é verdadeira"

2: Provar que $P(k), \text{ para todo } k \in [0..a] \implies P(a+1), \text{ para todo } a \in \mathbb{N}$

1: Tomar $a \in \mathbb{N}$ tal que $P(k), \text{ para todo } k \in [0..a]$

2: Provar que $P(a+1)$

$$\vdots$$

"Como $P(k), \text{ para todo } k \in [0..a] \dots$"

$$\vdots$$

"Portanto, $P(a+1)$."

# Prova por Indução: esquema

1: Provar que $P(0)$

$$\vdots$$

"Portanto, $P(0)$ é verdadeira"

2: Tomar $a \in \mathbb{N}$ tal que $P(k)$, para todo $k \in [0..a]$

3: Provar que $P(a+1)$

$$\vdots$$

"Como $P(k)$, para todo $k \in [0..a]$ ..."

$$\vdots$$

"Portanto, $P(a+1)$."

# Prova por Indução: esquema

Base da Indução: Provar que $P(0)$

$\vdots$

"Portanto, $P(0)$ é verdadeira"

2: Tomar $a \in \mathbb{N}$ tal que $P(k)$, para todo $k \in [0..a]$

3: Provar que $P(a+1)$

$\vdots$

"Como $P(k)$, para todo $k \in [0..a]$ ..."

$\vdots$

"Portanto, $P(a+1)$."

# Prova por Indução: esquema

Base da Indução: Provar que $P(0)$

$\vdots$

"Portanto, $P(0)$ é verdadeira"

Hipótese de Indução: Tomar $a \in \mathbb{N}$ tal que $P(k)$, para todo $k \in [0..a]$

3: Provar que $P(a+1)$

$\vdots$

"Como $P(k)$, para todo $k \in [0..a]$ ..."

$\vdots$

"Portanto, $P(a+1)$."

# Prova por Indução: esquema

Base da Indução: Provar que $P(0)$

$\vdots$

"Portanto, $P(0)$ é verdadeira"

Hipótese de Indução: Tomar $a \in \mathbb{N}$ tal que $P(k)$, para todo $k \in [0..a]$

Passo de Indução: Provar que $P(a+1)$

$\vdots$

"Como $P(k)$, para todo $k \in [0..a]$ ..."

$\vdots$

"Portanto, $P(a+1)$."

# Prova por Indução: esquema

Base da Indução: Provar que $P(0)$

$\vdots$

"Portanto, $P(0)$ é verdadeira"

Hipótese de Indução: Tomar $a \in \mathbb{N}$ tal que $P(k)$, para todo $k \in [0..a]$

Passo de Indução: Provar que $P(a+1)$

$\vdots$

"Pela Hipótese de Indução, ..."

$\vdots$

"Portanto, $P(a+1)$."

# Prova por Indução do Teorema 17

# Prova por Indução do Teorema 17

Hipótese da Indução: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

# Prova por Indução do Teorema 17

Hipótese da Indução: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$, para todo $k \in [0..a]$

# Prova por Indução do Teorema 17

Hipótese da Indução: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$, para todo $k \in [0..a]$

Passo da Indução: Vamos provar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{a+1} i = \frac{(a+1)\left((a+1)+1\right)}{2}$

# Prova por Indução do Teorema 17

Hipótese da Indução: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$, para todo $k \in [0..a]$

Passo da Indução: Vamos provar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{a+1} i = \frac{(a+1)\,((a+1)+1)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{a+1} i = \left(\sum_{i=1}^{a} i\right) + (a+1)$$

## Prova por Indução do Teorema 17

Hipótese da Indução: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$, para todo $k \in [0..a]$

Passo da Indução: Vamos provar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{a+1} i = \frac{(a+1)\,((a+1)+1)}{2}$

$\sum_{i=1}^{a+1} i = (\sum_{i=1}^{a} i) + (a+1)$

Pela Hipótese de Indução, $\sum_{i=1}^{a} i = \frac{a(a+1)}{2}$

# Prova por Indução do Teorema 17

Hipótese da Indução: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$, para todo $k \in [0..a]$

Passo da Indução: Vamos provar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{a+1} i = \frac{(a+1)\,((a+1)+1)}{2}$

$\sum_{i=1}^{a+1} i = (\sum_{i=1}^{a} i) + (a+1)$

Pela Hipótese de Indução, $\sum_{i=1}^{a} i = \frac{a(a+1)}{2}$

$\sum_{i=1}^{a+1} i = \left(\frac{a(a+1)}{2}\right) + (a+1)$

# Prova por Indução do Teorema 17

Hipótese da Indução: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$, para todo $k \in [0..a]$

Passo da Indução: Vamos provar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{a+1} i = \frac{(a+1)((a+1)+1)}{2}$

$\sum_{i=1}^{a+1} i = (\sum_{i=1}^{a} i) + (a+1)$

Pela Hipótese de Indução, $\sum_{i=1}^{a} i = \frac{a(a+1)}{2}$

$\sum_{i=1}^{a+1} i = \left(\frac{a(a+1)}{2}\right) + (a+1) = \ldots = \frac{(a+1)((a+1)+1)}{2}$

# Prova por Indução do Teorema 17

Hipótese da Indução: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$, para todo $k \in [0..a]$

Passo da Indução: Vamos provar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{a+1} i = \frac{(a+1)\,((a+1)+1)}{2}$

$\sum_{i=1}^{a+1} i = (\sum_{i=1}^{a} i) + (a+1)$

Pela Hipótese de Indução, $\sum_{i=1}^{a} i = \frac{a(a+1)}{2}$

$\sum_{i=1}^{a+1} i = \left(\frac{a(a+1)}{2}\right) + (a+1) = \ldots = \frac{(a+1)((a+1)+1)}{2}$

Base da Indução: Vamos provar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{0} i = \frac{0(0+1)}{2}$

# Prova por Indução do Teorema 17

Hipótese da Indução: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$, para todo $k \in [0..a]$

Passo da Indução: Vamos provar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{a+1} i = \frac{(a+1)((a+1)+1)}{2}$

$\sum_{i=1}^{a+1} i = (\sum_{i=1}^{a} i) + (a+1)$

Pela Hipótese de Indução, $\sum_{i=1}^{a} i = \frac{a(a+1)}{2}$

$\sum_{i=1}^{a+1} i = \left(\frac{a(a+1)}{2}\right) + (a+1) = \ldots = \frac{(a+1)((a+1)+1)}{2}$

Base da Indução: Vamos provar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{0} i = \frac{0(0+1)}{2}$

$\sum_{i=1}^{0} i = 0$

# Prova por Indução do Teorema 17

Hipótese da Indução: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$, para todo $k \in [0..a]$

Passo da Indução: Vamos provar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{a+1} i = \frac{(a+1)\,((a+1)+1)}{2}$

$\sum_{i=1}^{a+1} i = (\sum_{i=1}^{a} i) + (a+1)$

Pela Hipótese de Indução, $\sum_{i=1}^{a} i = \frac{a(a+1)}{2}$

$\sum_{i=1}^{a+1} i = \left(\frac{a(a+1)}{2}\right) + (a+1) = \ldots = \frac{(a+1)((a+1)+1)}{2}$

Base da Indução: Vamos provar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{0} i = \frac{0(0+1)}{2}$

$\sum_{i=1}^{0} i = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$

# Hipótese, Passo e Base da Indução

# Hipótese, Passo e Base da Indução

Hipótese da Indução: Suponha que $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$, para todo $k \in [0..a]$

# Hipótese, Passo e Base da Indução

Hipótese da Indução: Suponha que $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$, para todo $k \in [0..a]$

Passo da Indução: Vamos provar que $\sum_{i=1}^{a+1} i = \frac{(a+1)((a+1)+1)}{2}$

# Hipótese, Passo e Base da Indução

Hipótese da Indução: Suponha que $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$, para todo $k \in [0..a]$

Passo da Indução: Vamos provar que $\sum_{i=1}^{a+1} i = \frac{(a+1)((a+1)+1)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{a+1} i = \left(\sum_{i=1}^{a} i\right) + (a+1)$$

# Hipótese, Passo e Base da Indução

Hipótese da Indução: Suponha que $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$, para todo $k \in [0..a]$

Passo da Indução: Vamos provar que $\sum_{i=1}^{a+1} i = \frac{(a+1)((a+1)+1)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{a+1} i = (\sum_{i=1}^{a} i) + (a+1)$$

Pela Hipótese de Indução, $\sum_{i=1}^{a} i = \frac{a(a+1)}{2}$

# Hipótese, Passo e Base da Indução

Hipótese da Indução: Suponha que $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$, para todo $k \in [0..a]$

Passo da Indução: Vamos provar que $\sum_{i=1}^{a+1} i = \frac{(a+1)((a+1)+1)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{a+1} i = \left(\sum_{i=1}^{a} i\right) + (a+1)$$

Pela Hipótese de Indução, $\sum_{i=1}^{a} i = \frac{a(a+1)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{a+1} i = \left(\frac{a(a+1)}{2}\right) + (a+1) = \ldots = \frac{(a+1)((a+1)+1)}{2}$$

# Passo de Indução: $a + 1 = 4$

Hipótese da Indução: Suponha que $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$, para todo $k \in [0..3]$

Passo da Indução: Vamos provar que $\sum_{i=1}^{3+1} i = \frac{(3+1)((3+1)+1)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{3+1} i = \left(\sum_{i=1}^{3} i\right) + (3 + 1)$$

Pela Hipótese de Indução, $\sum_{i=1}^{3} i = \frac{3(3+1)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{3+1} i = \left(\frac{3(3+1)}{2}\right) + (3 + 1) = \ldots = \frac{(3+1)((3+1)+1)}{2}$$

# Passo de Indução: $a + 1 = 3$

Hipótese da Indução: Suponha que $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$, para todo $k \in [0..2]$

Passo da Indução: Vamos provar que $\sum_{i=1}^{2+1} i = \frac{(2+1)((2+1)+1)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{2+1} i = \left(\sum_{i=1}^{2} i\right) + (2 + 1)$$

Pela Hipótese de Indução, $\sum_{i=1}^{2} i = \frac{2(2+1)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{2+1} i = \left(\frac{2(2+1)}{2}\right) + (2 + 1) = \ldots = \frac{(2+1)((2+1)+1)}{2}$$

# Passo de Indução: $a + 1 = 2$

Hipótese da Indução: Suponha que $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$, para todo $k \in [0..1]$

Passo da Indução: Vamos provar que $\sum_{i=1}^{1+1} i = \frac{(1+1)((1+1)+1)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{1+1} i = \left(\sum_{i=1}^{1} i\right) + (1 + 1)$$

Pela Hipótese de Indução, $\sum_{i=1}^{1} i = \frac{1(1+1)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{1+1} i = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right) + (1 + 1) = \ldots = \frac{(1+1)((1+1)+1)}{2}$$

# Passo de Indução: $a + 1 = 1$

Hipótese da Indução: Suponha que $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$, para todo $k \in [0..0]$

Passo da Indução: Vamos provar que $\sum_{i=1}^{0+1} i = \frac{(0+1)((0+1)+1)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{0+1} i = \left(\sum_{i=1}^{0} i\right) + (0 + 1)$$

Pela Hipótese de Indução, $\sum_{i=1}^{0} i = \frac{0(0+1)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{0+1} i = \left(\frac{0(0+1)}{2}\right) + (0 + 1) = \ldots = \frac{(0+1)((0+1)+1)}{2}$$

# Passo de Indução: $a + 1 = 0$

Hipótese da Indução: Suponha que $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$, para todo $k \in [0.. -1]$

Passo da Indução: Vamos provar que $\sum_{i=1}^{-1+1} i = \frac{(-1+1)((-1+1)+1)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{-1+1} i = \left(\sum_{i=1}^{-1} i\right) + (-1 + 1)$$

Pela Hipótese de Indução, $\sum_{i=1}^{-1} i = \frac{-1(-1+1)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{-1+1} i = \left(\frac{-1(-1+1)}{2}\right) + (-1 + 1) = \ldots = \frac{(-1+1)((-1+1)+1)}{2}$$

## Passo de Indução: $a + 1 = 0$

Hipótese da Indução: Suponha que $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$, para todo $k \in [0.. -1]$

Passo da Indução: Vamos provar que $\sum_{i=1}^{-1+1} i = \frac{(-1+1)((-1+1)+1)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{-1+1} i = \left(\sum_{i=1}^{-1} i\right) + (-1 + 1)$$

Pela Hipótese de Indução, $\sum_{i=1}^{-1} i = \frac{-1(-1+1)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{-1+1} i = \left(\frac{-1(-1+1)}{2}\right) + (-1 + 1) = \ldots = \frac{(-1+1)((-1+1)+1)}{2}$$

Errado!

# Base da Indução

# Base da Indução

prova de que $P(k)$ é verdadeira **para os** $k \in \mathbb{N}$ **aos quais o argumento do passo de indução não se aplica**

# Base da Indução

prova de que $P(k)$ é verdadeira **para os** $k \in \mathbb{N}$ **aos quais o argumento do passo de indução não se aplica**

Base da Indução na prova do Teorema 17

# Base da Indução

prova de que $P(k)$ é verdadeira **para os** $k \in \mathbb{N}$ **aos quais o argumento do passo de indução não se aplica**

Base da Indução na prova do Teorema 17

Provar que $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$, para todo $k \in$

# Base da Indução

prova de que $P(k)$ é verdadeira **para os $k \in \mathbb{N}$ aos quais o argumento do passo de indução não se aplica**

Base da Indução na prova do Teorema 17

Provar que $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$, para todo $k \in \{0\}$

# Base da Indução

prova de que $P(k)$ é verdadeira **para os** $k \in \mathbb{N}$ **aos quais o argumento do passo de indução não se aplica**

Base da Indução na prova do Teorema 17

Provar que $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$, para todo $k \in \{0\}$

$\sum_{i=1}^{0} i = 0$

# Base da Indução

prova de que $P(k)$ é verdadeira **para os** $k \in \mathbb{N}$ **aos quais o argumento do passo de indução não se aplica**

Base da Indução na prova do Teorema 17

Provar que $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$, para todo $k \in \{0\}$

$\sum_{i=1}^{0} i = 0$

$\frac{0(0+1)}{2} = \frac{0}{2} = 0$

# Prova por Indução: esquema geral

**Proposição:** $P(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

# Prova por Indução: esquema geral

**Proposição:** $P(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Demonstração.

Por indução em $n$.

# Prova por Indução: esquema geral

**Proposição:** $P(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Demonstração.

Por indução em $n$.

Hipótese de Indução: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que $P(k)$, para todo $k \in [0..a]$

# Prova por Indução: esquema geral

**Proposição:** $P(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Demonstração.

Por indução em $n$.

Hipótese de Indução: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que $P(k)$, para todo $k \in [0..a]$

Passo de Indução: Provar que $P(a + 1)$ é verdadeira

# Prova por Indução: esquema geral

**Proposição:** $P(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Demonstração.

Por indução em $n$.

Hipótese de Indução: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que $P(k)$, para todo $k \in [0..a]$

Passo de Indução: Provar que $P(a+1)$ é verdadeira

Base da Indução: Provar que $P(k)$ é verdadeira para os $k \in \mathbb{N}$ aos quais o argumento do passo de indução não se aplica

$\square$