

Matemática Discreta

Unidade 12: Exercícios de Indução (3)

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Unidade 10: Exemplos de Prova por Indução

Exercicio 58 (união & conjuntos)

Exercício 58

Use o fato de que se A e B são conjuntos finitos e disjuntos entre si então

$$|A \cup B| = |A| + |B|,$$

para provar, por indução em n que, se A_1, \dots, A_n são conjuntos finitos dois a dois disjuntos entre si, então,

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i|$$

Exercício 58 (União Disjunta Generalizada)

Vamos provar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se A_1, \dots, A_n são conjuntos finitos dois a dois disjuntos entre si, então

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i|,$$

por indução em n .

Exercício 58 (União Disjunta Generalizada)

Vamos provar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se A_1, \dots, A_n são conjuntos finitos dois a dois disjuntos entre si, então

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i|,$$

por indução em n .

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k \in [0..a]$, se A_1, \dots, A_k são conjuntos finitos dois a dois disjuntos entre si, então

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = \sum_{i=1}^k |A_i|.$$

Exercício 58 (União Disjunta Generalizada)

Passo: Vamos provar que se A_1, \dots, A_{a+1} são conjuntos finitos dois a dois disjuntos entre si, então

$$\left| \bigcup_{i=1}^{a+1} A_i \right| = \sum_{i=1}^{a+1} |A_i|.$$

Exercício 58 (União Disjunta Generalizada)

Passo: Vamos provar que se A_1, \dots, A_{a+1} são conjuntos finitos dois a dois disjuntos entre si, então

$$\left| \bigcup_{i=1}^{a+1} A_i \right| = \sum_{i=1}^{a+1} |A_i|.$$

Sejam A_1, \dots, A_{a+1} , conjuntos finitos dois a dois disjuntos entre si.
Como $a + 1 > 0$, então

Exercício 58 (União Disjunta Generalizada)

Passo: Vamos provar que se A_1, \dots, A_{a+1} são conjuntos finitos dois a dois disjuntos entre si, então

$$\left| \bigcup_{i=1}^{a+1} A_i \right| = \sum_{i=1}^{a+1} |A_i|.$$

Sejam A_1, \dots, A_{a+1} , conjuntos finitos dois a dois disjuntos entre si. Como $a + 1 > 0$, então

$$\bigcup_{i=1}^{a+1} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^a A_i \right) \cup A_{a+1}.$$

Exercício 58 (União Disjunta Generalizada)

Passo: ...

Se $a \geq 2$, então $2 \in [0..a]$ e daí, pela HI,

$$\left| \bigcup_{i=1}^{a+1} A_i \right| = \left| \left(\bigcup_{i=1}^a A_i \right) \cup A_{a+1} \right| = \left| \bigcup_{i=1}^a A_i \right| + |A_{a+1}|.$$

Exercício 58 (União Disjunta Generalizada)

Passo: ...

Se $a \geq 2$, então $2 \in [0..a]$ e daí, pela HI,

$$\left| \bigcup_{i=1}^{a+1} A_i \right| = \left| \left(\bigcup_{i=1}^a A_i \right) \cup A_{a+1} \right| = \left| \bigcup_{i=1}^a A_i \right| + |A_{a+1}|.$$

Como $a \in [0..a]$, da HI temos também

$$\left| \bigcup_{i=1}^a A_i \right| = \sum_{i=1}^a |A_i|,$$

e daí,

$$\left| \bigcup_{i=1}^{a+1} A_i \right| = \left| \bigcup_{i=1}^a A_i \right| + |A_{a+1}| =$$

Exercício 58 (União Disjunta Generalizada)

Passo: ...

Se $a \geq 2$, então $2 \in [0..a]$ e daí, pela HI,

$$\left| \bigcup_{i=1}^{a+1} A_i \right| = \left| \left(\bigcup_{i=1}^a A_i \right) \cup A_{a+1} \right| = \left| \bigcup_{i=1}^a A_i \right| + |A_{a+1}|.$$

Como $a \in [0..a]$, da HI temos também

$$\left| \bigcup_{i=1}^a A_i \right| = \sum_{i=1}^a |A_i|,$$

e daí,

$$\left| \bigcup_{i=1}^{a+1} A_i \right| = \left| \bigcup_{i=1}^a A_i \right| + |A_{a+1}| = \sum_{i=1}^a |A_i| + |A_{a+1}| = \sum_{i=1}^{a+1} |A_i|.$$

Exercício 58 (União Disjunta Generalizada)

Base: Vamos provar que

$$\left| \bigcup_{i=1}^b A_i \right| = \sum_{i=1}^b |A_i|, \text{ para todo } b \in [0..2].$$

Se $b = 0$, temos

$$\left| \bigcup_{i=1}^b A_i \right| = 0,$$

e

$$\sum_{i=1}^b |A_i| = 0.$$

Exercício 58 (União Disjunta Generalizada)

Base: Vamos provar que

$$\left| \bigcup_{i=1}^b A_i \right| = \sum_{i=1}^b |A_i|, \text{ para todo } b \in [0..2].$$

Se $b = 1$, temos

$$\left| \bigcup_{i=1}^b A_i \right| = |A_1|,$$

e

$$\sum_{i=1}^b |A_i| = |A_1|.$$

Exercício 58 (União Disjunta Generalizada)

Base: Vamos provar que

$$\left| \bigcup_{i=1}^b A_i \right| = \sum_{i=1}^b |A_i|, \text{ para todo } b \in [0..2].$$

Se $b = 2$, temos

$$\left| \bigcup_{i=1}^2 A_i \right| = |A_1 \cup A_2|,$$

e

$$\sum_{i=1}^2 |A_i| = |A_1| + |A_2|,$$

que é fato conhecido.

Exercício 58 (União Disjunta Generalizada)

Portanto, se A_1, \dots, A_n são conjuntos finitos dois a dois disjuntos entre si, então,

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.