Matemática Discreta

Unidade 13: Descrições Recursivas (1)

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Unidade 13: Descrições Recursivas (1)

Objetivo:

- Montar algoritmos **recursivos**

Unidade 13: Descrições Recursivas (1)

Objetivo:

- Montar algoritmos **recursivos**
- Que viram recorrências,

Unidade 13: Descrições Recursivas (1)

Objetivo:

- Montar algoritmos **recursivos**
- Que viram recorrências,
- Que você aprenderá a resolvê-las.

Unidade 13: Descrições Recursivas (1)

Objetivo:

- Montar algoritmos **recursivos**
- Que viram recorrências,
- Que você aprenderá a resolvê-las.

A estrutura é a seguinte.

- Começamos com um problema (tamanho da representação binária)

Unidade 13: Descrições Recursivas (1)

Objetivo:

- Montar algoritmos **recursivos**
- Que viram recorrências,
- Que você aprenderá a resolvê-las.

A estrutura é a seguinte.

- Começamos com um problema (tamanho da representação binária)
- Formulamos uma solução por meio de uma recorrência (algoritmo recursivo)

Unidade 13: Descrições Recursivas (1)

Objetivo:

- Montar algoritmos **recursivos**
- Que viram recorrências,
- Que você aprenderá a resolvê-las.

A estrutura é a seguinte.

- Começamos com um problema (tamanho da representação binária)
- Formulamos uma solução por meio de uma recorrência (algoritmo recursivo)
- E provamos por indução que a solução obtida é correta (a corretude do algoritmo)
  - anunciando que mais adiante será ensinado um jeito de obter solução para a recorrência.

Problema: Tamanho na representação binária de n

Seja $l\colon \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$ dada por

$l(n)$: tamanho (número de dígitos) na representação binária de n.

Problema: Tamanho na representação binária de n

Seja $l\colon \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$ dada por

$l(n)$: tamanho (número de dígitos) na representação binária de n.

Expressão para $l(n)$?

Problema: Tamanho na representação binária de n

Seja $l \colon \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$ dada por

$l(n)$: tamanho (número de dígitos) na representação binária de n.

Expressão para $l(n)$?

Ideia: descrever através de uma recorrência.

Tamanho na representação binária de n

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Tamanho na representação binária de n

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Temos,

n	$f(n)$	$l(n)$
1	1	1

Tamanho na representação binária de n

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Temos,

n	$f(n)$	$l(n)$
1	1	1
2	2	2

Tamanho na representação binária de n

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Temos,

n	$f(n)$	$l(n)$
1	1	1
2	2	2
3	2	2

Tamanho na representação binária de n

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Temos,

n	$f(n)$	$l(n)$
1	1	1
2	2	2
3	2	2
4	3	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Teorema 18: Tamanho na representação binária de n

Será verdade que $f(n)$ é o número de dígitos na representação binária de n, para todo $n > 0$, isto é, será que

Teorema 18: Tamanho na representação binária de n

Será verdade que $f(n)$ é o número de dígitos na representação binária de n, para todo $n > 0$, isto é, será que

Teorema 18:

$$l(n) = f(n), \text{ para todo } n > 0.$$

Prova: Exercício 75

Prova do Teorema 18: Ex. 75

Sejam $l, f : \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$ dadas por

$$l(n):\ \text{tamanho (número de dígitos) na representação binária de } n,$$

e

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Prove que

$$l(n) = f(n),\ \text{para todo } n > 0.$$

Prova do Teorema 18: Ex. 75

Vamos provar que

$$I(n) = f(n), \text{ para todo } n > 0,$$

por indução em n.

Prova do Teorema 18: Ex. 75

Vamos provar que

$$l(n) = f(n), \text{ para todo } n > 0,$$

por indução em n.

H.I.: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

Prova do Teorema 18: Ex. 75

Vamos provar que

$$l(n) = f(n), \text{ para todo } n > 0,$$

por indução em n.

H.I.: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$l(k) = f(k) \textit{ para todo } k \in [1..a].$$

Prova do Teorema 18: Ex. 75

Passo: Vamos provar que

$$l(a+1) = f(a+1)$$

Prova do Teorema 18: Ex. 75

Passo: Vamos provar que

$$I(a+1) = f(a+1)$$

Se $a+1 > 1$, da definição de f temos que

$$f(a+1) = f\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1,$$

Prova do Teorema 18: Ex. 75

Passo: Vamos provar que

$$l(a+1) = f(a+1)$$

Se $a+1 > 1$, da definição de f temos que

$$f(a+1) = f\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1,$$

e que

$$\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \leq a,$$

Prova do Teorema 18: Ex. 75

Passo: Vamos provar que

$$I(a+1) = f(a+1)$$

Se $a+1 > 1$, da definição de f temos que

$$f(a+1) = f\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1,$$

e que

$$\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \leq a,$$

e daí, temos pela HI que

$$I\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1 = f\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1$$

Prova do Teorema 18: Ex. 75

Passo: ...

Seja então

$$m = l\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right),$$

Prova do Teorema 18: Ex. 75

Passo: ...

Seja então

$$m = l\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right),$$

e seja

$$d_0 d_1 \ldots d_{m-1},$$

a representação binária de $\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor$,

Prova do Teorema 18: Ex. 75

Passo: ...

Seja então

$$m = l\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right),$$

e seja

$$d_0 d_1 \ldots d_{m-1},$$

a representação binária de $\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor$, isto é,

$$\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor = d_{m-1}2^0 + d_{m-2}2^1 + \ldots d_0 2^{m-1}$$

Prova do Teorema 18: Ex. 75

Passo: ...

Seja então

$$m = l\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right),$$

e seja

$$d_0 d_1 \ldots d_{m-1},$$

a representação binária de $\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor$, isto é,

$$\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor = d_{m-1}2^0 + d_{m-2}2^1 + \ldots d_0 2^{m-1} = \sum_{i=0}^{m-1} d_i 2^{(m-1)-i}.$$

Prova do Teorema 18: Ex. 75

Passo: ...

Se $a+1$ é par, então

$$\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor = \frac{a+1}{2}$$

Prova do Teorema 18: Ex. 75

Passo: ...

Se $a+1$ é par, então

$$\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor = \frac{a+1}{2}$$

e, portanto,

$$\frac{a+1}{2} = \sum_{i=0}^{m-1} d_i 2^{(m-1)-i},$$

Prova do Teorema 18: Ex. 75

Passo: ...

Se $a+1$ é par, então

$$\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor = \frac{a+1}{2}$$

e, portanto,

$$\frac{a+1}{2} = \sum_{i=0}^{m-1} d_i 2^{(m-1)-i},$$

ou seja,

$$a+1 = \sum_{i=0}^{m-1} d_i 2^{m-i} =$$

Prova do Teorema 18: Ex. 75

Passo: ...

Se $a+1$ é par, então

$$\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor = \frac{a+1}{2}$$

e, portanto,

$$\frac{a+1}{2} = \sum_{i=0}^{m-1} d_i 2^{(m-1)-i},$$

ou seja,

$$a+1 = \sum_{i=0}^{m-1} d_i 2^{m-i} = \sum_{i=0}^{m-1} d_i 2^{m-i} + 0 2^0 =$$

Prova do Teorema 18: Ex. 75

Passo: ...

Se $a+1$ é par, então

$$\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor = \frac{a+1}{2}$$

e, portanto,

$$\frac{a+1}{2} = \sum_{i=0}^{m-1} d_i 2^{(m-1)-i},$$

ou seja,

$$a+1 = \sum_{i=0}^{m-1} d_i 2^{m-i} = \sum_{i=0}^{m-1} d_i 2^{m-i} + 0 2^0 = \sum_{i=0}^{m} d_i 2^{m-i},$$

para $d_m = 0$.

Prova do Teorema 18: Ex. 75

Passo: ...

Noutras palavras,

$$d_0 d_1 \ldots d_m,$$

a representação binária de $a+1$, isto é,

$$l(a+1) = m+1 = f\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1 = f(a+1).$$

Prova do Teorema 18: Ex. 75

Passo: ...

Noutras palavras,

$$d_0 d_1 \ldots d_m,$$

a representação binária de $a+1$, isto é,

$$l(a+1) = m+1 = f\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1 = f(a+1).$$

Por argumento análogo concluímos que, também quando $a+1$ é ímpar, $l(a+1) = f(a+1)$.

Prova do Teorema 18: Ex. 75

Base: Vamos provar que

$$I(1) = f(1).$$

Prova do Teorema 18: Ex. 75

Base: Vamos provar que

$$l(1) = f(1).$$

Por um lado, $l(1) = 1$ pois a representação binária de 1 tem 1 dígito.

Prova do Teorema 18: Ex. 75

Base: Vamos provar que

$$l(1) = f(1).$$

Por um lado, $l(1) = 1$ pois a representação binária de 1 tem 1 dígito.

Por outro lado, $f(1) = 1$.

Prova do Teorema 18: Ex. 75

Base: Vamos provar que

$$l(1) = f(1).$$

Por um lado, $l(1) = 1$ pois a representação binária de 1 tem 1 dígito.

Por outro lado, $f(1) = 1$.

Logo, é verdade $l(1) = f(1)$.