Matemática Discreta

Unidade 14: Descrições Recursivas (2)

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Unidade 14: Descrições Recursivas (2)

Objetivo:

- Montar algoritmos **recursivos**

Unidade 14: Descrições Recursivas (2)

Objetivo:

- Montar algoritmos **recursivos**
- Que viram recorrências,

Unidade 14: Descrições Recursivas (2)

Objetivo:

- Montar algoritmos **recursivos**
- Que viram recorrências,
- Que você aprenderá a resolvê-las.

Unidade 14: Descrições Recursivas (2)

Objetivo:

- Montar algoritmos **recursivos**
- Que viram recorrências,
- Que você aprenderá a resolvê-las.

A estrutura é a seguinte.

- Começamos com um problema (tamanho da representação binária)

Unidade 14: Descrições Recursivas (2)

Objetivo:

- Montar algoritmos **recursivos**
- Que viram recorrências,
- Que você aprenderá a resolvê-las.

A estrutura é a seguinte.

- Começamos com um problema (tamanho da representação binária)
- Formulamos uma solução por meio de uma recorrência (algoritmo recursivo)

Unidade 14: Descrições Recursivas (2)

Objetivo:

- Montar algoritmos **recursivos**
- Que viram recorrências,
- Que você aprenderá a resolvê-las.

A estrutura é a seguinte.

- Começamos com um problema (tamanho da representação binária)
- Formulamos uma solução por meio de uma recorrência (algoritmo recursivo)
- E provamos por indução que a solução obtida é correta (a corretude do algoritmo)
  - anunciando que mais adiante será ensinado um jeito de obter solução para a recorrência.

Resolução para o problema recursivo anterior ($f(n) = ?$)

Se $l \colon \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$ é a função dada por

$$l(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ l\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \text{se } n > 1, \end{cases}$$

então

Resolução para o problema recursivo anterior ($f(n) = ?$)

Se $l\colon \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$ é a função dada por

$$l(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ l\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \text{se } n > 1, \end{cases}$$

então

$$l(n) = \lfloor \lg n \rfloor + 1, \text{ para todo } n > 0.$$

Resolução para o problema recursivo anterior ($f(n) = ?$)

Teorema 19: Se $l \colon \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$ é a função dada por

$$l(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ l\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \text{se } n > 1, \end{cases}$$

então

$$l(n) = \lfloor \lg n \rfloor + 1, \text{ para todo } n > 0.$$

Prova do Teorema 19: Ex. 76

Seja $l\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$l(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ l\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Prove por indução em n que

$$l(n) = \lfloor \lg n \rfloor + 1, \text{ para todo } n > 0.$$

Prova do Teorema 19: Ex. 76

Vamos provar que

$$l(n) = \lfloor \lg n \rfloor + 1, \text{ para todo } n > 0,$$

por indução em n.

Prova do Teorema 19: Ex. 76

Vamos provar que

$$l(n) = \lfloor \lg n \rfloor + 1, \text{ para todo } n > 0,$$

por indução em n.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$l(k) = \lfloor \lg k \rfloor + 1, \text{ para todo } k \in [1..a].$$

Prova do Teorema 19: Ex. 76

Passo: Vamos provar que

$$l(a+1) = \lfloor \lg(a+1) \rfloor + 1.$$

Se $a+1 > 1$, então

$$l(a+1) = l\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1,$$

Prova do Teorema 19: Ex. 76

Passo: Vamos provar que

$$l(a+1) = \lfloor \lg(a+1) \rfloor + 1.$$

Se $a+1 > 1$, então

$$l(a+1) = l\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1,$$

e como $\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \in [0..a]$, então pela H.I. temos

Prova do Teorema 19: Ex. 76

Passo: Vamos provar que

$$l(a+1) = \lfloor \lg(a+1) \rfloor + 1.$$

Se $a+1 > 1$, então

$$l(a+1) = l\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1,$$

e como $\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \in [0..a]$, então pela H.I. temos

$$l\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) = \left\lfloor \lg \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \right\rfloor + 1$$

Prova do Teorema 19: Ex. 76

Passo: Vamos provar que

$$l(a+1) = \lfloor \lg(a+1) \rfloor + 1.$$

Se $a+1 > 1$, então

$$l(a+1) = l\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1,$$

e como $\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \in [0..a]$, então pela H.I. temos

$$\begin{aligned} l\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) &= \left\lfloor \lg \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \right\rfloor + 1 \\ &\overset{\text{T 15}}{=} \left\lfloor \lg \frac{a+1}{2} \right\rfloor + 1 = \lfloor \lg(a+1) - 1 \rfloor + 1 \end{aligned}$$

Prova do Teorema 19: Ex. 76

Passo: Vamos provar que

$$l(a+1) = \lfloor \lg(a+1) \rfloor + 1.$$

Se $a+1 > 1$, então

$$l(a+1) = l\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1,$$

e como $\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \in [0..a]$, então pela H.I. temos

$$\begin{aligned} l\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) &= \left\lfloor \lg \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \right\rfloor + 1 \\ &\overset{\text{T 15}}{=} \left\lfloor \lg \frac{a+1}{2} \right\rfloor + 1 = \lfloor \lg(a+1) - 1 \rfloor + 1 \\ &\overset{\text{T 10}}{=} \lfloor \lg(a+1) \rfloor - 1 + 1 \end{aligned}$$

Prova do Teorema 19: Ex. 76

Passo: Vamos provar que

$$l(a+1) = \lfloor \lg(a+1) \rfloor + 1.$$

Se $a+1 > 1$, então

$$l(a+1) = l\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1,$$

e como $\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \in [0..a]$, então pela H.I. temos

$$\begin{aligned} l\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) &= \left\lfloor \lg \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \right\rfloor + 1 \\ &\overset{\text{T 15}}{=} \left\lfloor \lg \frac{a+1}{2} \right\rfloor + 1 = \lfloor \lg(a+1) - 1 \rfloor + 1 \\ &\overset{\text{T 10}}{=} \lfloor \lg(a+1) \rfloor - 1 + 1 \\ &= \lfloor \lg(a+1) \rfloor . \end{aligned}$$

Prova do Teorema 19: Ex. 76

Base: Vamos provar que

$$l(1) = \lfloor \lg(1) \rfloor + 1.$$

Prova do Teorema 19: Ex. 76

Base: Vamos provar que

$$l(1) = \lfloor \lg(1) \rfloor + 1.$$

Basta verificar que

$$l(1) = 1,$$

Prova do Teorema 19: Ex. 76

Base: Vamos provar que

$$l(1) = \lfloor \lg(1) \rfloor + 1.$$

Basta verificar que

$$l(1) = 1,$$

e que,

$$\lfloor \lg(1) \rfloor + 1 = 0 + 1 = 1.$$

Colorário 20

Para todo $n > 0$, a representação binária de n tem $\lfloor \lg n \rfloor + 1$ dígitos.