Matemática Discreta

Unidade 15: Descrições Recursivas (3)

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Problema: Número de dígitos 1 na representação binária de n.

Seja $b\colon \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$ dada por

$b(n)$: número de dígitos 1 na representação binária de n.

Problema: Número de dígitos 1 na representação binária de n.

Seja $b\colon \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$ dada por

$b(n)$: número de dígitos 1 na representação binária de n.

Ideia:

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f\left(\frac{n}{2}\right) & \text{se } n \text{ é par}, \\ f\left(\frac{n-1}{2}\right) + 1 & \text{se } n \text{ é ímpar}. \end{cases}$$

Problema: Número de dígitos 1 na representação binária de n.

Seja $b\colon \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$ dada por

$b(n)$: número de dígitos 1 na representação binária de n.

Ideia:

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f\left(\frac{n}{2}\right) & \text{se } n \text{ é par}, \\ f\left(\frac{n-1}{2}\right) + 1 & \text{se } n \text{ é ímpar}. \end{cases}$$

ou mais concisamente

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + (n \bmod 2) & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Problema: Número de dígitos 1 na representação binária de n.

Seja $b\colon \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$ dada por

$b(n)$: número de dígitos 1 na representação binária de n.

Ideia:

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f\left(\frac{n}{2}\right) & \text{se } n \text{ é par}, \\ f\left(\frac{n-1}{2}\right) + 1 & \text{se } n \text{ é ímpar}. \end{cases}$$

ou mais concisamente

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + (n \bmod 2) & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Teorema 21:

$$b(n) = f(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 21: Ex. 77.(a)

Sejam

$b(n)$: o número de dígitos 1 na representação binária de n.

e $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função dada por

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + (n \bmod 2) & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

(a) Prove que o número de dígitos 1 na representação binária de n é $f(n)$, para todo $n \geq 0$.

Teorema 21: Ex. 77.(a)

Vamos provar que

$$b(n) = f(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

por indução em n.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

Teorema 21: Ex. 77.(a)

Vamos provar que

$$b(n) = f(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

por indução em n.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$b(k) = f(k), \text{ para todo } k \in [0..a].$$

Teorema 21: Ex. 77.(a)

Passo: Vamos provar que

$$b(a+1) = f(a+1)$$

Teorema 21: Ex. 77.(a)

Passo: Vamos provar que

$$b(a+1) = f(a+1)$$

Para $a+1 > 0$, temos da definição de f que

$$f(a+1) = f\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + ((a+1) \bmod 2),$$

Teorema 21: Ex. 77.(a)

Passo: Vamos provar que

$$b(a+1) = f(a+1)$$

Para $a+1 > 0$, temos da definição de f que

$$f(a+1) = f\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + ((a+1) \bmod 2),$$

e como $\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \in [0..a]$, pela H.I. temos

Teorema 21: Ex. 77.(a)

Passo: Vamos provar que

$$b(a+1) = f(a+1)$$

Para $a+1 > 0$, temos da definição de f que

$$f(a+1) = f\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + ((a+1) \bmod 2),$$

e como $\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \in [0..a]$, pela H.I. temos

$$b\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) = f\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right).$$

Teorema 21: Ex. 77.(a)

Passo: Vamos provar que

$$b(a+1) = f(a+1)$$

Para $a+1 > 0$, temos da definição de f que

$$f(a+1) = f\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + ((a+1) \bmod 2),$$

e como $\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \in [0..a]$, pela H.I. temos

$$b\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) = f\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right).$$

ou seja,

$$f(a+1) = b\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + ((a+1) \bmod 2).$$

Teorema 21: Ex. 77.(a)

Passo: ...

Se $a+1$ é par, sabemos que

$$b(a+1) = b\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right),$$

Teorema 21: Ex. 77.(a)

Passo: ...

Se $a + 1$ é par, sabemos que

$$b(a+1) = b\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right),$$

ou seja

$$b(a+1) = b\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + ((a+1) \bmod 2)$$

Teorema 21: Ex. 77.(a)

Passo: ...

Se $a+1$ é par, sabemos que

$$b(a+1) = b\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right),$$

ou seja

$$b(a+1) = b\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + ((a+1) \bmod 2)$$

e, portanto,

$$f(a+1) = b(a+1).$$

Teorema 21: Ex. 77.(a)

Passo: ...

Se $a+1$ é ímpar, sabemos que

$$b(a+1) = b\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1,$$

Teorema 21: Ex. 77.(a)

Passo: ...

Se $a+1$ é ímpar, sabemos que

$$b(a+1) = b\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1,$$

ou seja

$$b(a+1) = b\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + ((a+1) \bmod 2)$$

Teorema 21: Ex. 77.(a)

Passo: ...

Se $a+1$ é ímpar, sabemos que

$$b(a+1) = b\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1,$$

ou seja

$$b(a+1) = b\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + ((a+1) \bmod 2)$$

e, portanto,

$$f(a+1) = b(a+1).$$

Teorema 21: Ex. 77.(a)

Base: Vamos provar que

$$b(0) = f(0).$$

Teorema 21: Ex. 77.(a)

Base: Vamos provar que

$$b(0) = f(0).$$

Basta verificar que, pela definição de b,

$$b(0) = 0,$$

Teorema 21: Ex. 77.(a)

Base: Vamos provar que

$$b(0) = f(0).$$

Basta verificar que, pela definição de b,

$$b(0) = 0,$$

e que, pela definição de f,

$$f(0) = 0$$

Teorema 21: Ex. 77.(b)

Sejam

$b(n)$: o número de dígitos 1 na representação binária de n.

e $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função dada por

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + (n \bmod 2) & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

(b) Prove que

$$f(n) \leq \lfloor \lg n \rfloor + 1, \text{ para todo } n > 0.$$

Teorema 21: Ex. 77.(b)

Dos Exercícios 75 e 76 concluímos que o comprimento da representação binária de n é $\lfloor \lg n \rfloor + 1$, para todo $n > 0$.

Teorema 21: Ex. 77.(b)

Dos Exercícios 75 e 76 concluímos que o comprimento da representação binária de n é $\lfloor \lg n \rfloor + 1$, para todo $n > 0$.

Do item anterior concluímos que $f(n)$ é o número de 1s na representação binária de n, para todo $n > 0$.

Teorema 21: Ex. 77.(b)

Dos Exercícios 75 e 76 concluímos que o comprimento da representação binária de n é $\lfloor \lg n \rfloor + 1$, para todo $n > 0$.

Do item anterior concluímos que $f(n)$ é o número de 1s na representação binária de n, para todo $n > 0$.

Segue imediatamente que

$$f(n) \leq \lfloor \lg n \rfloor + 1, \text{ para todo } n > 0.$$