Matemática Discreta

Unidade 16: Funções Iteradas (1)

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Unidade 16: Funções Iteradas (1)

O objetivo desta aula é exercitar a ideia de cálculo iterado de uma função que será intensivamente usada nas próximas aulas (segunda parte) para resolver recorrências. Para resolver recorrências do tipo

$$f(n) = m(n)f(h(n)) + s(n),$$

é preciso saber determinar a expressão de $h^k(n)$, $s^k(n)$ e $m^k(n)$ a partir das expressões de $h(n)$, $s(n)$ e $m(n)$, respectivamente.

Definição

Definição

Sejam A, B, C conjuntos e sejam $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$. A **composição** *de f com g é a função $f \circ g\colon A \to C$ dada por*

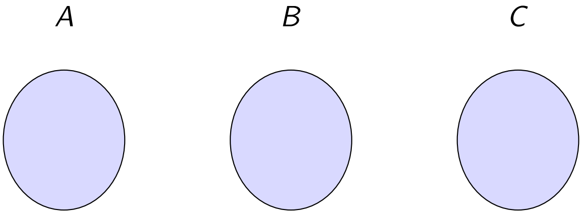
$$f \circ g(x) := g(f(x)).$$

Definição

Definição

Sejam A, B, C conjuntos e sejam $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$. A **composição** *de f com g é a função $f \circ g\colon A \to C$ dada por*

$$f \circ g(x) := g(f(x)).$$

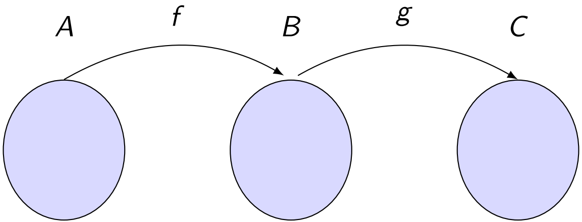


Definição

Definição

Sejam A, B, C conjuntos e sejam $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$. A **composição** *de f com g é a função $f \circ g\colon A \to C$ dada por*

$$f \circ g(x) := g(f(x)).$$

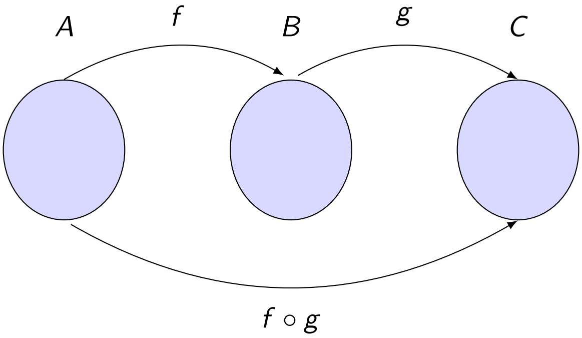


Definição

Definição

Sejam A, B, C *conjuntos e sejam* $f: A \to B$ *e* $g: B \to C$. *A* **composição** *de* f *com* g *é a função* $f \circ g: A \to C$ *dada por*

$$f \circ g(x) := g(f(x)).$$



Definição

Definição

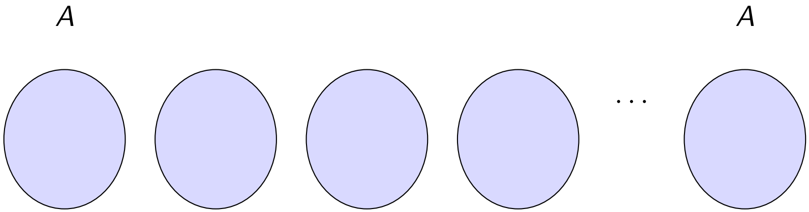
Seja A um conjunto e $f\colon A \to A$ uma função. Para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos $f^n\colon A \to A$ como

$$f^n(a) = (\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{nvezes})(a) = \underbrace{f(f(\ldots f}_{nvezes}(a))).$$

Definição

Seja A um conjunto e $f\colon A \to A$ uma função. Para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos $f^n\colon A \to A$ como

$$f^n(a) = (\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{nvezes})(a) = \underbrace{f(f(\ldots f}_{nvezes}(a))).$$

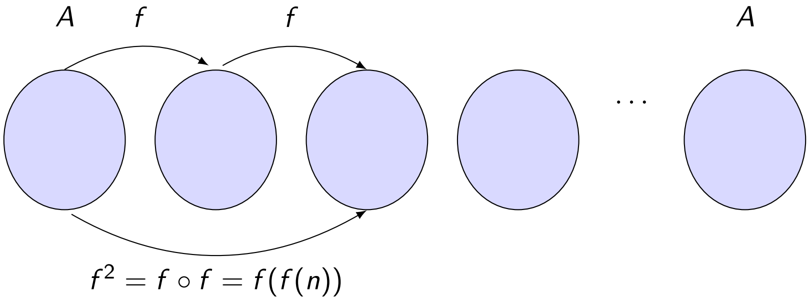


Definição

Definição

Seja A um conjunto e $f\colon A \to A$ uma função. Para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos $f^n\colon A \to A$ como

$$f^n(a) = (\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{nvezes})(a) = \underbrace{f(f(\ldots f}_{nvezes}(a))).$$

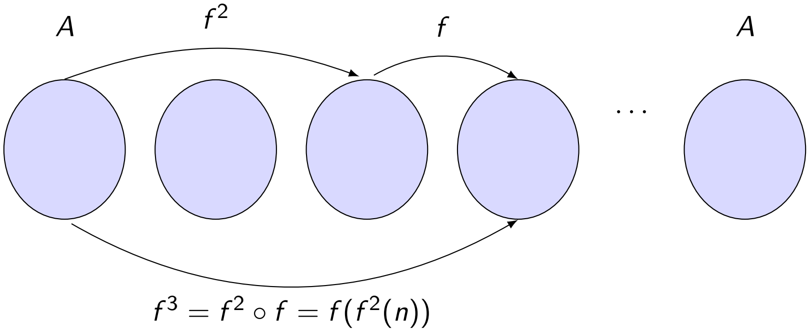


Definição

Definição

Seja A um conjunto e $f\colon A \to A$ uma função. Para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos $f^n\colon A \to A$ como

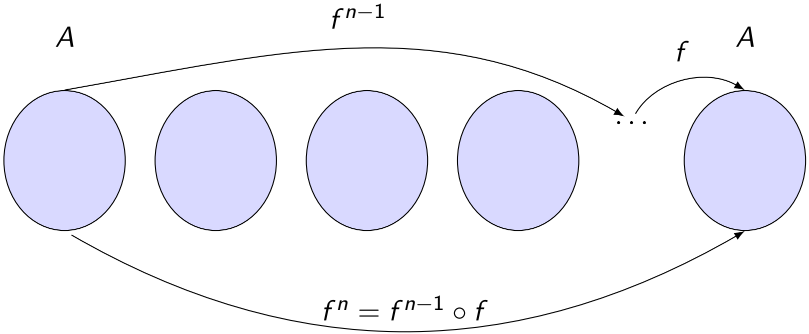
$$f^n(a) = (\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{nvezes})(a) = \underbrace{f(f(\ldots f}_{nvezes}(a))).$$



Definição

Seja A um conjunto e $f\colon A \to A$ uma função. Para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos $f^n\colon A \to A$ como

$$f^n(a) = (\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{nvezes})(a) = \underbrace{f(f(\ldots f}_{nvezes}(a))).$$



Definição

Definição

Mais precisamente,

$$f^n := \begin{cases} I, & \text{se } n = 0, \\ f^{n-1} \circ f, & \text{se } n > 0, \end{cases}$$

onde $I \colon A \to A$ *denota a função identidade, dada por*

$$I(a) = a \text{ para todo } a \in A.$$

Exercício 91

Para cada uma das funções $f(x)$ abaixo, dê uma expressão para $f^n(x)$. Em cada caso, prove por indução em n que sua resposta está correta.

a $f(x) = x + 1$.

b $f(x) = x + 2$.

c $f(x) = x + 3$.

d $f(x) = x + s$.

e $f(x) = 2x$.

f $f(x) = 3x$.

g $f(x) = mx$.

h $f(x) = s + mx$.

Exercício 91(a) Seja $f(x) = x + 1$, dê a expressão para $f^n(x)$

O cálculo de $f^n(x)$, pela definição recursiva, deriva em f^{n-1}, que por sua vez precisa de f^{n-2} e assim por diante. Isto é, o cálculo de $f^n(x)$ se desdobra recursivamente enquanto $n > 0$. Em outras palavras, partimos de $f^1 = f^0 \circ f(x) = f(f^0(x)) = f(x)$. E daí, vem que f^2 é definido como

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f \circ f(x) = f(f(x)) = f(x+1) \\ &= (x+1) + 1 = x + 2. \end{aligned}$$

Exercício 91(a) Seja $f(x) = x + 1$, dê a expressão para $f^n(x)$

O cálculo de $f^n(x)$, pela definição recursiva, deriva em f^{n-1}, que por sua vez precisa de f^{n-2} e assim por diante. Isto é, o cálculo de $f^n(x)$ se desdobra recursivamente enquanto $n > 0$. Em outras palavras, partimos de $f^1 = f^0 \circ f(x) = f(f^0(x)) = f(x)$. E daí, vem que f^2 é definido como

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f \circ f(x) = f(f(x)) = f(x+1) \\ &= (x+1) + 1 = x + 2. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} f^3(x) &= f^2 \circ f(x) = f(f^2(x)) = f(x+2) \\ &= (x+2) + 1 = x + 3. \end{aligned}$$

Exercício 91(a) Seja $f(x) = x + 1$, dê a expressão para $f^n(x)$

O cálculo de $f^n(x)$, pela definição recursiva, deriva em f^{n-1}, que por sua vez precisa de f^{n-2} e assim por diante. Isto é, o cálculo de $f^n(x)$ se desdobra recursivamente enquanto $n > 0$. Em outras palavras, partimos de $f^1 = f^0 \circ f(x) = f(f^0(x)) = f(x)$. E daí, vem que f^2 é definido como

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f \circ f(x) = f(f(x)) = f(x+1) \\ &= (x+1) + 1 = x + 2. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} f^3(x) &= f^2 \circ f(x) = f(f^2(x)) = f(x+2) \\ &= (x+2) + 1 = x + 3. \end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned} f^4(x) &= f^3 \circ f(x) = f(f^3(x)) = f(x+3) \\ &= (x+3) + 1 = x + 4. \end{aligned}$$

Exercício 91(a) Seja $f(x) = x + 1$, dê a expressão para $f^n(x)$

Isto nos leva a crer que a forma de $f^n(x)$ é

$$\begin{aligned} f^n(x) &= f^{n-1} \circ f(x) = f(f^{n-1}(x)) = f(x + (n-1)) \\ &= (x + (n-1)) + 1 = x + n, \end{aligned}$$

mas este resultado não está provado.

Exercício 91(a) Seja $f(x) = x + 1$, dê a expressão para $f^n(x)$

Isto nos leva a crer que a forma de $f^n(x)$ é

$$\begin{aligned} f^n(x) &= f^{n-1} \circ f(x) = f(f^{n-1}(x)) = f(x + (n-1)) \\ &= (x + (n-1)) + 1 = x + n, \end{aligned}$$

mas este resultado não está provado.

Resta provar, por indução em n, que, se $f(x) = x + 1$,

$$f^n(x) = x + n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Exercício 91(a) Prove que $f^n(x) = x + n,$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vamos provar que

$$f^n(x) = x + n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Exercício 91(a) Prove que $f^n(x) = x + n,\;$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vamos provar que

$$f^n(x) = x + n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Hipótese Indutiva: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^k(x) = x + k, \text{ para todo } k \in [0..a].$$

Exercício 91(a) Prove que $f^n(x) = x + n,$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Passo da Indução: Vamos provar que

$$f^{a+1}(x) = x + (a+1).$$

Pela definição de f^n, temos que

$$f^{a+1}(x) = f^a \circ f(x) = f(f^a(x)).$$

Como $a \in [0..a]$, da hipótese indutiva, vem que

$$f^a(x) = x + a,$$

e portanto

$$f^{a+1}(x) = f(f^a(x)) = f(x+a) = (x+a) + 1 = x + (a+1).$$

Exercício 91(a) Prove que $f^n(x) = x + n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Base: Seja $b = 0$, vamos provar que

$$f^b(x) = x + b.$$

Por um lado (pela definição de $f^n x$),

$$f^0(x) = x.$$

Por outro lado,

$$x + 0 = x.$$

Exercício 91(b) Seja $f(x) = x + 2$, dê a expressão para $f^n(x)$

Partindo de $f^1 = f^0 \circ f(x) = f(f^0(x)) = f(x)$, daí, vem que f^2 é definido como

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f \circ f(x) = f(f(x)) = f(x+2) \\ &= (x+2) + 2 = x + 4 = x + 2 \times 2. \end{aligned}$$

Exercício 91(b) Seja $f(x) = x + 2$, dê a expressão para $f^n(x)$

Partindo de $f^1 = f^0 \circ f(x) = f(f^0(x)) = f(x)$, daí, vem que f^2 é definido como

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f \circ f(x) = f(f(x)) = f(x+2) \\ &= (x+2) + 2 = x + 4 = x + 2 \times 2. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} f^3(x) &= f^2 \circ f(x) = f(f^2(x)) = f(x+4) \\ &= (x+4) + 2 = x + 6 = x + 3 \times 2. \end{aligned}$$

Exercício 91(b) Seja $f(x) = x + 2$, dê a expressão para $f^n(x)$

Partindo de $f^1 = f^0 \circ f(x) = f(f^0(x)) = f(x)$, daí, vem que f^2 é definido como

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f \circ f(x) = f(f(x)) = f(x+2) \\ &= (x+2) + 2 = x + 4 = x + 2 \times 2. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} f^3(x) &= f^2 \circ f(x) = f(f^2(x)) = f(x+4) \\ &= (x+4) + 2 = x + 6 = x + 3 \times 2. \end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned} f^4(x) &= f^3 \circ f(x) = f(f^3(x)) = f(x+6) \\ &= (x+6) + 2 = x + 8 = x + 4 \times 2. \end{aligned}$$

Exercício 91(b) Seja $f(x) = x + 2$, dê a expressão para $f^n(x)$

Isto nos leva a crer que a forma de $f^n(x)$ é

$$\begin{aligned} f^n(x) &= f^{n-1} \circ f(x) = f(f^{n-1}(x)) = f(x + 2(n-1)) \\ &= (x + 2(n-1)) + 2 = x + 2n, \end{aligned}$$

mas este resultado não está provado.

Exercício 91(b) Seja $f(x) = x + 2$, dê a expressão para $f^n(x)$

Isto nos leva a crer que a forma de $f^n(x)$ é

$$\begin{aligned} f^n(x) &= f^{n-1} \circ f(x) = f(f^{n-1}(x)) = f(x + 2(n-1)) \\ &= (x + 2(n-1)) + 2 = x + 2n, \end{aligned}$$

mas este resultado não está provado.

Resta provar, por indução em n, que, se $f(x) = x + 2$,

$$f^n(x) = x + 2n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

o que é deixado como exercício.

Exercício 91(c) Seja $f(x) = x + 3$, dê a expressão para $f^n(x)$

Partindo de $f^1 = f^0 \circ f(x) = f(f^0(x)) = f(x)$, daí, vem que f^2 é definido como

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f \circ f(x) = f(f(x)) = f(x+3) \\ &= (x+3) + 3 = x + 6 = x + 2 \times 3. \end{aligned}$$

Exercício 91(c) Seja $f(x) = x + 3$, dê a expressão para $f^n(x)$

Partindo de $f^1 = f^0 \circ f(x) = f(f^0(x)) = f(x)$, daí, vem que f^2 é definido como

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f \circ f(x) = f(f(x)) = f(x+3) \\ &= (x+3) + 3 = x + 6 = x + 2 \times 3. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} f^3(x) &= f^2 \circ f(x) = f(f^2(x)) = f(x+6) \\ &= (x+6) + 3 = x + 9 = x + 3 \times 3. \end{aligned}$$

Exercício 91(c) Seja $f(x) = x + 3$, dê a expressão para $f^n(x)$

Partindo de $f^1 = f^0 \circ f(x) = f(f^0(x)) = f(x)$, daí, vem que f^2 é definido como

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f \circ f(x) = f(f(x)) = f(x+3) \\ &= (x+3) + 3 = x + 6 = x + 2 \times 3. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} f^3(x) &= f^2 \circ f(x) = f(f^2(x)) = f(x+6) \\ &= (x+6) + 3 = x + 9 = x + 3 \times 3. \end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned} f^4(x) &= f^3 \circ f(x) = f(f^3(x)) = f(x+9) \\ &= (x+9) + 3 = x + 12 = x + 4 \times 3. \end{aligned}$$

Exercício 91(c) Seja $f(x) = x + 3$, dê a expressão para $f^n(x)$

Isto nos leva a crer que a forma de $f^n(x)$ é

$$\begin{aligned} f^n(x) &= f^{n-1} \circ f(x) = f(f^{n-1}(x)) = f(x + 3(n-1)) \\ &= (x + 3(n-1)) + 3 = x + 3n, \end{aligned}$$

mas este resultado não está provado.

Exercício 91(c) Seja $f(x) = x + 3$, dê a expressão para $f^n(x)$

Isto nos leva a crer que a forma de $f^n(x)$ é

$$\begin{aligned} f^n(x) &= f^{n-1} \circ f(x) = f(f^{n-1}(x)) = f(x + 3(n-1)) \\ &= (x + 3(n-1)) + 3 = x + 3n, \end{aligned}$$

mas este resultado não está provado.

Resta provar, por indução em n, que, se $f(x) = x + 3$,

$$f^n(x) = x + 3n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

o que é deixado como exercício.

Exercício 91(d) Seja $f(x) = x + s$, dê a expressão para $f^n(x)$

Partindo de $f^1 = f^0 \circ f(x) = f(f^0(x)) = f(x)$, daí, vem que f^2 é definido como

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f \circ f(x) = f(f(x)) = f(x + s) \\ &= (x + s) + s = x + 2s = x + 2 \times s. \end{aligned}$$

Exercício 91(d) Seja $f(x) = x + s$, dê a expressão para $f^n(x)$

Partindo de $f^1 = f^0 \circ f(x) = f(f^0(x)) = f(x)$, daí, vem que f^2 é definido como

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f \circ f(x) = f(f(x)) = f(x + s) \\ &= (x + s) + s = x + 2s = x + 2 \times s. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} f^3(x) &= f^2 \circ f(x) = f(f^2(x)) = f(x + 2s) \\ &= (x + 2s) + s = x + 3s = x + 3 \times s. \end{aligned}$$

Exercício 91(d) Seja $f(x) = x + s$, dê a expressão para $f^n(x)$

Partindo de $f^1 = f^0 \circ f(x) = f(f^0(x)) = f(x)$, daí, vem que f^2 é definido como

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f \circ f(x) = f(f(x)) = f(x + s) \\ &= (x + s) + s = x + 2s = x + 2 \times s. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} f^3(x) &= f^2 \circ f(x) = f(f^2(x)) = f(x + 2s) \\ &= (x + 2s) + s = x + 3s = x + 3 \times s. \end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned} f^4(x) &= f^3 \circ f(x) = f(f^3(x)) = f(x + 3s) \\ &= (x + 3s) + s = x + 4s = x + 4 \times s. \end{aligned}$$

Exercício 91(d) Seja $f(x) = x + s$, dê a expressão para $f^n(x)$

Isto nos leva a crer que a forma de $f^n(x)$ é

$$\begin{aligned} f^n(x) &= f^{n-1} \circ f(x) = f(f^{n-1}(x)) = f(x + s(n-1)) \\ &= (x + s(n-1)) + s = x + sn, \end{aligned}$$

mas este resultado não está provado.

Exercício 91(d) Seja $f(x) = x + s$, dê a expressão para $f^n(x)$

Isto nos leva a crer que a forma de $f^n(x)$ é

$$\begin{aligned} f^n(x) &= f^{n-1} \circ f(x) = f(f^{n-1}(x)) = f(x + s(n-1)) \\ &= (x + s(n-1)) + s = x + sn, \end{aligned}$$

mas este resultado não está provado.

Resta provar, por indução em n, que, se $f(x) = x + s$,

$$f^n(x) = x + sn, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

o que é deixado como exercício.

Exercício 91(e) Seja $f(x) = 2x$, dê a expressão para $f^n(x)$

Partindo de $f^1 = f^0 \circ f(x) = f(f^0(x)) = f(x)$, daí, vem que f^2 é definido como

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f \circ f(x) = f(f(x)) = f(2x) \\ &= 2(2x) = 4x = 2^2 x. \end{aligned}$$

Exercício 91(e) Seja $f(x) = 2x$, dê a expressão para $f^n(x)$

Partindo de $f^1 = f^0 \circ f(x) = f(f^0(x)) = f(x)$, daí, vem que f^2 é definido como

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f \circ f(x) = f(f(x)) = f(2x) \\ &= 2(2x) = 4x = 2^2x. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} f^3(x) &= f^2 \circ f(x) = f(f^2(x)) = f(2^2x) \\ &= 2(2^2x) = 8x = 2^3x. \end{aligned}$$

Exercício 91(e) Seja $f(x) = 2x$, dê a expressão para $f^n(x)$

Partindo de $f^1 = f^0 \circ f(x) = f(f^0(x)) = f(x)$, daí, vem que f^2 é definido como

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f \circ f(x) = f(f(x)) = f(2x) \\ &= 2(2x) = 4x = 2^2 x. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} f^3(x) &= f^2 \circ f(x) = f(f^2(x)) = f(2^2 x) \\ &= 2(2^2 x) = 8x = 2^3 x. \end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned} f^4(x) &= f^3 \circ f(x) = f(f^3(x)) = f(2^3 x) \\ &= 2(2^3 x) = 16x = 2^4 x. \end{aligned}$$

Exercício 91(e) Seja $f(x) = 2x$, dê a expressão para $f^n(x)$

Isto nos leva a crer que a forma de $f^n(x)$ é

$$\begin{aligned} f^n(x) &= f^{n-1} \circ f(x) = f(f^{n-1}(x)) = f(2^{n-1}x) \\ &= 2 2^{n-1}x = 2^n x, \end{aligned}$$

mas este resultado não está provado.

Exercício 91(e) Seja $f(x) = 2x$, dê a expressão para $f^n(x)$

Isto nos leva a crer que a forma de $f^n(x)$ é

$$\begin{aligned} f^n(x) &= f^{n-1} \circ f(x) = f(f^{n-1}(x)) = f(2^{n-1}x) \\ &= 2 2^{n-1} x = 2^n x, \end{aligned}$$

mas este resultado não está provado.

Resta provar, por indução em n, que, se $f(x) = 2x$,

$$f^n(x) = 2^n x, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

o que é deixado como exercício.

Exercício 91(f) Seja $f(x) = 3x$, dê a expressão para $f^n(x)$

Partindo de $f^1 = f^0 \circ f(x) = f(f^0(x)) = f(x)$, daí, vem que f^2 é definido como

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f \circ f(x) = f(f(x)) = f(3x) \\ &= 3(3x) = 9x = 3^2 x. \end{aligned}$$

Exercício 91(f) Seja $f(x) = 3x$, dê a expressão para $f^n(x)$

Partindo de $f^1 = f^0 \circ f(x) = f(f^0(x)) = f(x)$, daí, vem que f^2 é definido como

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f \circ f(x) = f(f(x)) = f(3x) \\ &= 3(3x) = 9x = 3^2 x. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} f^3(x) &= f^2 \circ f(x) = f(f^2(x)) = f(3^2 x) \\ &= 3(3^2 x) = 27x = 3^3 x. \end{aligned}$$

Exercício 91(f) Seja $f(x) = 3x$, dê a expressão para $f^n(x)$

Partindo de $f^1 = f^0 \circ f(x) = f(f^0(x)) = f(x)$, daí, vem que f^2 é definido como

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f \circ f(x) = f(f(x)) = f(3x) \\ &= 3(3x) = 9x = 3^2x. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} f^3(x) &= f^2 \circ f(x) = f(f^2(x)) = f(3^2x) \\ &= 3(3^2x) = 27x = 3^3x. \end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned} f^4(x) &= f^3 \circ f(x) = f(f^3(x)) = f(3^3x) \\ &= 3(3^3x) = 81x = 3^4x. \end{aligned}$$

Exercício 91(f) Seja $f(x) = 3x$, dê a expressão para $f^n(x)$

Isto nos leva a crer que a forma de $f^n(x)$ é

$$\begin{aligned} f^n(x) &= f^{n-1} \circ f(x) = f(f^{n-1}(x)) = f(3^{n-1}x) \\ &= 3 3^{n-1}x = 3^n x, \end{aligned}$$

mas este resultado não está provado.

Exercício 91(f) Seja $f(x) = 3x$, dê a expressão para $f^n(x)$

Isto nos leva a crer que a forma de $f^n(x)$ é

$$\begin{aligned} f^n(x) &= f^{n-1} \circ f(x) = f(f^{n-1}(x)) = f(3^{n-1}x) \\ &= 3 3^{n-1} x = 3^n x, \end{aligned}$$

mas este resultado não está provado.

Resta provar, por indução em n, que, se $f(x) = 3x$,

$$f^n(x) = 3^n x, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

o que é deixado como exercício.

Exercício 91(g) Seja $f(x) = mx$, dê a expressão para $f^n(x)$

Partindo de $f^1 = f^0 \circ f(x) = f(f^0(x)) = f(x)$, daí, vem que f^2 é definido como

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f \circ f(x) = f(f(x)) = f(mx) \\ &= m(mx) = m^2 x. \end{aligned}$$

Exercício 91(g) Seja $f(x) = mx$, dê a expressão para $f^n(x)$

Partindo de $f^1 = f^0 \circ f(x) = f(f^0(x)) = f(x)$, daí, vem que f^2 é definido como

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f \circ f(x) = f(f(x)) = f(mx) \\ &= m(mx) = m^2x. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} f^3(x) &= f^2 \circ f(x) = f(f^2(x)) = f(m^2x) \\ &= m(m^2x) = m^3x. \end{aligned}$$

Exercício 91(g) Seja $f(x) = mx$, dê a expressão para $f^n(x)$

Partindo de $f^1 = f^0 \circ f(x) = f(f^0(x)) = f(x)$, daí, vem que f^2 é definido como

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f \circ f(x) = f(f(x)) = f(mx) \\ &= m(mx) = m^2x. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} f^3(x) &= f^2 \circ f(x) = f(f^2(x)) = f(m^2x) \\ &= m(m^2x) = m^3x. \end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned} f^4(x) &= f^3 \circ f(x) = f(f^3(x)) = f(m^3x) \\ &= m(m^3x) = m^4x. \end{aligned}$$

Exercício 91(g) Seja $f(x) = mx$, dê a expressão para $f^n(x)$

Isto nos leva a crer que a forma de $f^n(x)$ é

$$\begin{aligned} f^n(x) &= f^{n-1} \circ f(x) = f(f^{n-1}(x)) = f(m^{n-1}x) \\ &= mm^{n-1}x = m^n x, \end{aligned}$$

mas este resultado não está provado.

Exercício 91(g) Seja $f(x) = mx$, dê a expressão para $f^n(x)$

Isto nos leva a crer que a forma de $f^n(x)$ é

$$\begin{aligned} f^n(x) &= f^{n-1} \circ f(x) = f(f^{n-1}(x)) = f(m^{n-1}x) \\ &= mm^{n-1}x = m^n x, \end{aligned}$$

mas este resultado não está provado.

Resta provar, por indução em n, que, se $f(x) = mx$,

$$f^n(x) = m^n x, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

o que é deixado como exercício.

Exercício 91(h) Seja $f(x) = s + mx$, dê a expressão para $f^n(x)$

Partindo de $f^1 = f^0 \circ f(x) = f(f^0(x)) = f(x)$, daí, vem que f^2 é definido como

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f \circ f(x) = f(f(x)) = f(s + mx) \\ &= s + m(s + mx) = s + ms + m^2x = m^0s + m^1s + m^2x. \end{aligned}$$

Exercício 91(h) Seja $f(x) = s + mx$, dê a expressão para $f^n(x)$

Partindo de $f^1 = f^0 \circ f(x) = f(f^0(x)) = f(x)$, daí, vem que f^2 é definido como

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f \circ f(x) = f(f(x)) = f(s + mx) \\ &= s + m(s + mx) = s + ms + m^2x = m^0s + m^1s + m^2x. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} f^3(x) &= f^2 \circ f(x) = f(f^2(x)) = f(s + ms + m^2x) \\ &= s + m(s + ms + m^2x) = s + ms + m^2s + m^3x \\ &= m^0s + m^1s + m^2s + m^3x. \end{aligned}$$

Exercício 91(h) Seja $f(x) = s + mx$, dê a expressão para $f^n(x)$

Partindo de $f^1 = f^0 \circ f(x) = f(f^0(x)) = f(x)$, daí, vem que f^2 é definido como

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f \circ f(x) = f(f(x)) = f(s + mx) \\ &= s + m(s + mx) = s + ms + m^2x = m^0s + m^1s + m^2x. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} f^3(x) &= f^2 \circ f(x) = f(f^2(x)) = f(s + ms + m^2x) \\ &= s + m(s + ms + m^2x) = s + ms + m^2s + m^3x \\ &= m^0s + m^1s + m^2s + m^3x. \end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned} f^4(x) &= f^3 \circ f(x) = f(f^3(x)) = f(s + ms + m^2s + m^3x) \\ &= s + m(s + ms + m^2s + m^3x) = s + ms + m^2s + m^3s + m^4x \\ &= m^0s + m^1s + m^2s + m^3s + m^4x. \end{aligned}$$

Exercício 91(h) Seja $f(x) = s + mx$, dê a expressão para $f^n(x)$

Isto nos leva a crer que a forma de $f^n(x)$ tem dois componentes, um exponencial e um somatório, onde s e m são constantes, isto é,

$$f^n(x) = m^n x + \sum_{i=0}^{n-1} sm^i = m^n x + s \sum_{i=0}^{n-1} m^i,$$

Exercício 91(h) Seja $f(x) = s + mx$, dê a expressão para $f^n(x)$

Isto nos leva a crer que a forma de $f^n(x)$ tem dois componentes, um exponencial e um somatório, onde s e m são constantes, isto é,

$$f^n(x) = m^n x + \sum_{i=0}^{n-1} s m^i = m^n x + s \sum_{i=0}^{n-1} m^i,$$

e o somatório é uma progressão geométrica de razão m com n termos, e portanto

$$f^n(x) = \begin{cases} x + sn, & \text{se } m = 1, \\ m^n x + s\frac{m^n - 1}{m - 1}, & \text{se } m \neq 1, \end{cases}$$

mas este resultado não está provado.

Exercício 91(h) Seja $f(x) = s + mx$, dê a expressão para $f^n(x)$

Isto nos leva a crer que a forma de $f^n(x)$ tem dois componentes, um exponencial e um somatório, onde s e m são constantes, isto é,

$$f^n(x) = m^n x + \sum_{i=0}^{n-1} s m^i = m^n x + s \sum_{i=0}^{n-1} m^i,$$

e o somatório é uma progressão geométrica de razão m com n termos, e portanto

$$f^n(x) = \begin{cases} x + sn, & \text{se } m = 1, \\ m^n x + s\frac{m^n-1}{m-1}, & \text{se } m \neq 1, \end{cases}$$

mas este resultado não está provado.
Resta provar, por indução em n, que, se $f(x) = s + mx$,

$$f^n(x) = \begin{cases} x + sn, & \text{se } m = 1, \\ m^n x + s\frac{m^n-1}{m-1}, & \text{se } m \neq 1, \end{cases}$$

e está proposto como Exercício 68.

Teorema 22

Teorema 22: Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $s, m \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = s + mx, \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

então, para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{N}$,

$$f^n(x) = \begin{cases} x + sn, & \text{se } m = 1, \\ m^n x + s\frac{m^n - 1}{m - 1}, & \text{se } m \neq 1. \end{cases}$$

Prova: Exercício 68