Matemática Discreta

Unidade 17: Funções Iteradas (2)

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Teorema 23

Teorema 23: Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções contínuas, então $f \circ g : A \to C$ é uma função contínua.

Prova: Exercício 42 (Cálculo I).

Teorema 24

Teorema 24: Sejam $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ e $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ funções crescentes. Então $f \circ g\colon A \to C$ é crescente.

Prova: Exercício 43

Teorema 25

Teorema 25: Sejam $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ e $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ funções integralizadas, isto é, satisfazendo

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in A,$$
$$g(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in B.$$

Então $f \circ g\colon A \to C$ é uma função integralizada.

Prova: Exercício 45

Corolário 26

Corolário 26: Sejam $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ e sejam $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ funções contínuas, crescentes e integralizadas. Então, para todo $x \in A$,

$$\begin{aligned} \lfloor f \circ g(\lfloor x \rfloor) \rfloor &= \lfloor f \circ g(x) \rfloor, \text{ e} \\ \lceil f \circ g(\lceil x \rceil) \rceil &= \lceil f \circ g(x) \rceil, \end{aligned}$$

Prova: Exercício 44.

Corolário 27

Corolário 27: Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ e seja $f : A \to A$ uma função contínua, crescente e integralizada. Então, para todo $x \in A$, e todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \lfloor f^n(\lfloor x \rfloor) \rfloor &= \lfloor f^n(x) \rfloor , \\ \lceil f^n(\lceil x \rceil) \rceil &= \lceil f^n(x) \rceil . \end{aligned}$$

Corolário 27

Corolário 27: Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ e seja $f : A \to A$ uma função contínua, crescente e integralizada. Então, para todo $x \in A$, e todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \lfloor f^n(\lfloor x \rfloor) \rfloor &= \lfloor f^n(x) \rfloor, \\ \lceil f^n(\lceil x \rceil) \rceil &= \lceil f^n(x) \rceil. \end{aligned}$$

Prova: Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ e seja $f : A \to A$ uma função contínua, crescente e integralizada.
Seja $x \in A$. Vamos provar por indução em n que

$$\begin{aligned} \lfloor f^n(\lfloor x \rfloor) \rfloor &= \lfloor f^n(x) \rfloor, \\ \lceil f^n(\lceil x \rceil) \rceil &= \lceil f^n(x) \rceil, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Corolário 27

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned}\left\lfloor f^k(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor &= \left\lfloor f^k(x) \right\rfloor, \\ \left\lceil f^k(\lceil x \rceil) \right\rceil &= \left\lceil f^k(x) \right\rceil,\end{aligned}$$

para todo $k \in [0..a]$.

Corolário 27

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned}\left\lfloor f^k(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor &= \left\lfloor f^k(x) \right\rfloor, \\ \left\lceil f^k(\lceil x \rceil) \right\rceil &= \left\lceil f^k(x) \right\rceil,\end{aligned}$$

para todo $k \in [0..a]$.

Passo: Vamos provar que

1. $\left\lfloor f^{a+1}(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor = \left\lfloor f^{a+1}(x) \right\rfloor$, e
2. $\left\lceil f^{a+1}(\lceil x \rceil) \right\rceil = \left\lceil f^{a+1}(x) \right\rceil$.

Corolário 27

Passo: ...

1. Vamos provar que
$$\left\lfloor f^{a+1}(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor = \left\lfloor f^{a+1}(x) \right\rfloor.$$
Se $a+1>0$, então
$$\left\lfloor f^{a+1}(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor = \lfloor f^{a} \circ f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(f^{a}(\lfloor x \rfloor)) \rfloor,$$
e como $1 \in [0..a]$ pela HI temos que
$$\left\lfloor f^{1}(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor = \left\lfloor f^{1}(x) \right\rfloor$$
isto é
$$\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor$$
então
$$\begin{aligned} \left\lfloor f^{a+1}(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor &= \lfloor f(f^{a}(\lfloor x \rfloor)) \rfloor \\ &= \lfloor f(\lfloor f^{a}(\lfloor x \rfloor) \rfloor) \rfloor. \end{aligned}$$

Corolário 27

Passo: ...

1. ...

   Como $a \in [0..a]$, pela HI também temos que

   $$\lfloor f^a(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f^a(x) \rfloor$$

   e portanto,

   $$\begin{aligned} \left\lfloor f^{a+1}(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor &= \lfloor f(\lfloor f^a(\lfloor x \rfloor) \rfloor) \rfloor \\ &= \lfloor f(\lfloor f^a(x) \rfloor) \rfloor . \end{aligned}$$

   Finalmente, do Corolário 26 temos que

   $$\left\lfloor f^1(\lfloor f^a(x) \rfloor) \right\rfloor = \left\lfloor f^1(f^a(x)) \right\rfloor = \left\lfloor f^{a+1}(x) \right\rfloor .$$

Corolário 27

Passo: ...

1. ...

   Como $a \in [0..a]$, pela HI também temos que

   $$\lfloor f^a(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f^a(x) \rfloor$$

   e portanto,

   $$\begin{aligned} \left\lfloor f^{a+1}(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor &= \lfloor f(\lfloor f^a(\lfloor x \rfloor) \rfloor) \rfloor \\ &= \lfloor f(\lfloor f^a(x) \rfloor) \rfloor . \end{aligned}$$

   Finalmente, do Corolário 26 temos que

   $$\left\lfloor f^1(\lfloor f^a(x) \rfloor) \right\rfloor = \left\lfloor f^1(f^a(x)) \right\rfloor = \left\lfloor f^{a+1}(x) \right\rfloor .$$

2. A prova de que

   $$\left\lceil f^{a+1}(\lceil x \rceil) \right\rceil = \left\lceil f^{a+1}(x) \right\rceil ,$$

   segue um argumento em tudo análogo ao acima.

Corolário 27

Base: Vamos provar que f^k satisfaz

$$\begin{aligned} \left\lfloor f^k(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor &= \left\lfloor f^k(x) \right\rfloor, \\ \left\lceil f^k(\lceil x \rceil) \right\rceil &= \left\lceil f^k(x) \right\rceil, \end{aligned}$$

para todo $k \leq 1$.

Corolário 27

Base: ...

Para $k = 0$ temos
$$\left\lfloor f^0(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor = \lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor = \lfloor x \rfloor,$$
e
$$\left\lfloor f^0(x) \right\rfloor = \lfloor x \rfloor,$$
e portanto,
$$\left\lfloor f^0(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor = \left\lfloor f^0(x) \right\rfloor.$$
Pelo mesmo argumento concluímos que
$$\left\lceil f^0(\lceil x \rceil) \right\rceil = \left\lceil f^0(x) \right\rceil$$

Corolário 27

Base: ...

Para $k = 1$ temos

$$\left\lfloor f^1(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor = \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor\,,$$

e como a função f é contínua, crescente e integralizada, temos do Teorema 15 que

$$\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor\,.$$

Como

$$\left\lfloor f^1(x) \right\rfloor = \lfloor f(x) \rfloor\,,$$

concluímos que

$$\left\lfloor f^1(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor = \left\lfloor f^1(x) \right\rfloor\,.$$

Pelo mesmo argumento concluímos que

$$\left\lceil f^1(\lceil x \rceil) \right\rceil = \left\lceil f^1(x) \right\rceil$$

Colorário 28

Corolário: Sejam $k \neq 0$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor.$$

Então

$$f^n(x) = \left\lfloor \frac{x}{k^n} \right\rfloor, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Prova: Exercício 93