Matemática Discreta

Unidade 18: Recorrências (1)

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Relação de Recorrência

Relação de Recorrência

equação recursiva satisfeita por uma função $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$

Relação de Recorrência

equação recursiva satisfeita por uma função $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$

exemplo: $f(n) = f(n-1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1$

Relação de Recorrência

equação recursiva satisfeita por uma função $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$

exemplo: $f(n) = f(n-1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1$

resolver a recorrência

Relação de Recorrência

equação recursiva satisfeita por uma função $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$

exemplo: $f(n) = f(n-1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1$

resolver a recorrência: obter expressão não recursiva para a função

Exemplo: $f(n) = f(n-1) + 1$, para todo $n \geq 1$

Exemplo: $f(n) = f(n-1) + 1$, para todo $n \geq 1$

$n \geq 1$

Exemplo: $f(n) = f(n-1) + 1$, para todo $n \geq 1$

$n \geq 1$: $f(n) = f(n-1) + 1$

Exemplo: $f(n) = f(n-1) + 1$, para todo $n \geq 1$

$n \geq 1$: $f(n) = f(n-1) + 1$

$f(n-1) \geq 1$

Exemplo: $f(n) = f(n-1) + 1$, para todo $n \geq 1$

$n \geq 1$: $f(n) = f(n-1) + 1$

$f(n-1) \geq 1$: $f(n) = f(n-1) + 1$

Exemplo: $f(n) = f(n-1) + 1$, para todo $n \geq 1$

$n \geq 1$: $f(n) = f(n-1) + 1$

$f(n-1) \geq 1$: $f(n) = f(n-1) + 1 = (f((n-1)-1) + 1) + 1$

Exemplo: $f(n) = f(n-1) + 1$, para todo $n \geq 1$

$n \geq 1$: $f(n) = f(n-1) + 1$

$f(n-1) \geq 1$: $f(n) = f(n-1) + 1 = (f((n-1) - 1) + 1) + 1 = f(n-2) + 2$

Exemplo: $f(n) = f(n-1) + 1$, para todo $n \geq 1$

$n \geq 1$: $f(n) = f(n-1) + 1$

$f(n-1) \geq 1$: $f(n) = f(n-1) + 1 = (f((n-1) - 1) + 1) + 1 = f(n-2) + 2$

$f(n-2) \geq 1$

Exemplo: $f(n) = f(n-1) + 1$, para todo $n \geq 1$

$n \geq 1$: $f(n) = f(n-1) + 1$

$f(n-1) \geq 1$: $f(n) = f(n-1) + 1 = (f((n-1) - 1) + 1) + 1 = f(n-2) + 2$

$f(n-2) \geq 1$: $f(n) = f(n-2) + 2$

Exemplo: $f(n) = f(n-1) + 1$, para todo $n \geq 1$

$n \geq 1$: $f(n) = f(n-1) + 1$

$f(n-1) \geq 1$: $f(n) = f(n-1) + 1 = (f((n-1)-1) + 1) + 1 = f(n-2) + 2$

$f(n-2) \geq 1$: $f(n) = f(n-2) + 2 = (f((n-2)-1) + 1) + 2$

Exemplo: $f(n) = f(n-1) + 1$, para todo $n \geq 1$

$n \geq 1$: $f(n) = f(n-1) + 1$

$f(n-1) \geq 1$: $f(n) = f(n-1) + 1 = (f((n-1)-1) + 1) + 1 = f(n-2) + 2$

$f(n-2) \geq 1$: $f(n) = f(n-2) + 2 = (f((n-2)-1) + 1) + 2 = f(n-3) + 3$

Exemplo: $f(n) = f(n-1) + 1$, para todo $n \geq 1$

$n \geq 1$: $f(n) = f(n-1) + 1$

$f(n-1) \geq 1$: $f(n) = f(n-1) + 1 = (f((n-1)-1) + 1) + 1 = f(n-2) + 2$

$f(n-2) \geq 1$: $f(n) = f(n-2) + 2 = (f((n-2)-1) + 1) + 2 = f(n-3) + 3$

$\vdots$

Exemplo: $f(n) = f(n-1) + 1$, para todo $n \geq 1$

$n \geq 1$: $f(n) = f(n-1) + 1$

$f(n-1) \geq 1$: $f(n) = f(n-1) + 1 = (f((n-1)-1) + 1) + 1 = f(n-2) + 2$

$f(n-2) \geq 1$: $f(n) = f(n-2) + 2 = (f((n-2)-1) + 1) + 2 = f(n-3) + 3$

$\vdots$

$f(n-(u-1)) \geq 1$

Exemplo: $f(n) = f(n-1) + 1$, para todo $n \geq 1$

$n \geq 1$: $f(n) = f(n-1) + 1$

$f(n-1) \geq 1$: $f(n) = f(n-1) + 1 = (f((n-1)-1) + 1) + 1 = f(n-2) + 2$

$f(n-2) \geq 1$: $f(n) = f(n-2) + 2 = (f((n-2)-1) + 1) + 2 = f(n-3) + 3$

$\vdots$

$f(n-(u-1)) \geq 1$: $f(n) = f(n-(u-1)-1) + (u-1) + 1$

Exemplo: $f(n) = f(n-1) + 1$, para todo $n \geq 1$

$n \geq 1$: $f(n) = f(n-1) + 1$

$f(n-1) \geq 1$: $f(n) = f(n-1) + 1 = (f((n-1)-1) + 1) + 1 = f(n-2) + 2$

$f(n-2) \geq 1$: $f(n) = f(n-2) + 2 = (f((n-2)-1) + 1) + 2 = f(n-3) + 3$

$\vdots$

$f(n-(u-1)) \geq 1$: $f(n) = f(n-(u-1)-1) + (u-1) + 1 = f(n-u) + u$

Exemplo: $f(n) = f(n-1) + 1$, para todo $n \geq 1$

$n \geq 1$: $f(n) = f(n-1) + 1$

$f(n-1) \geq 1$: $f(n) = f(n-1) + 1 = (f((n-1) - 1) + 1) + 1 = f(n-2) + 2$

$f(n-2) \geq 1$: $f(n) = f(n-2) + 2 = (f((n-2) - 1) + 1) + 2 = f(n-3) + 3$

$\vdots$

$f(n-(u-1)) \geq 1$: $f(n) = f(n-(u-1)-1) + (u-1) + 1 = f(n-u) + u$
u: última vez que podemos aplicar a relação de recorrência

Exemplo: $f(n) = f(n-1) + 1$, para todo $n \geq 1$

$n \geq 1$: $f(n) = f(n-1) + 1$

$f(n-1) \geq 1$: $f(n) = f(n-1) + 1 = (f((n-1) - 1) + 1) + 1 = f(n-2) + 2$

$f(n-2) \geq 1$: $f(n) = f(n-2) + 2 = (f((n-2) - 1) + 1) + 2 = f(n-3) + 3$

$\vdots$

$f(n-(u-1)) \geq 1$: $f(n) = f(n-(u-1)-1) + (u-1) + 1 = f(n-u) + u$
u: última vez que podemos aplicar a relação de recorrência

u: menor inteiro tal que $n - u < 1$

Exemplo: $f(n) = f(n-1) + 1$, para todo $n \geq 1$

$n \geq 1$: $f(n) = f(n-1) + 1$

$f(n-1) \geq 1$: $f(n) = f(n-1) + 1 = (f((n-1)-1) + 1) + 1 = f(n-2) + 2$

$f(n-2) \geq 1$: $f(n) = f(n-2) + 2 = (f((n-2)-1) + 1) + 2 = f(n-3) + 3$

$\vdots$

$f(n-(u-1)) \geq 1$: $f(n) = f(n-(u-1)-1) + (u-1) + 1 = f(n-u) + u$
u: última vez que podemos aplicar a relação de recorrência

u: menor inteiro tal que $n - u < 1$

$u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid n - k < 1\}$

Resumo

Resumo

se

$$f(n) = f(n-1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1$$

Resumo

se

$$f(n) = f(n-1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1$$

então

$$f(n) = f(n-u) + u$$

Resumo

se

$$f(n) = f(n-1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1$$

então

$$f(n) = f(n-u) + u$$

$u = \min \{k \in \mathbb{N} \mid n - k < 1\}$

Resumo

se

$$f(n) = f(n-1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1$$

então

$$f(n) = f(n-u) + u$$

$$u = \min \{k \in \mathbb{N} \mid n - k < 1\} = \min \{k \in \mathbb{N} \mid k > n - 1\}$$

Resumo

se

$$f(n) = f(n-1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1$$

então

$$f(n) = f(n-u) + u$$

$$u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid n - k < 1\} = \min\{k \in \mathbb{N} \mid k > n - 1\} \overset{\text{T 13}}{=} \lfloor n - 1 \rfloor + 1$$

Resumo

se

$$f(n) = f(n-1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1$$

então

$$f(n) = f(n-u) + u$$

$$u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid n - k < 1\} = \min\{k \in \mathbb{N} \mid k > n - 1\} \overset{\text{T 13}}{=} \lfloor n-1 \rfloor + 1 \overset{\text{T 10}}{=} \lfloor n \rfloor$$

Resumo

se

$$f(n) = f(n-1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1$$

então

$$f(n) = f(n-u) + u$$

$$u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid n - k < 1\} = \min\{k \in \mathbb{N} \mid k > n-1\} \overset{\mathsf{T}\ 13}{=} \lfloor n-1 \rfloor + 1 \overset{\mathsf{T}\ 10}{=} \lfloor n \rfloor = n$$

Resumo

Resumo

se

$$f(n) = f(n-1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1$$

Resumo

se

$$f(n) = f(n-1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1$$

então

$$f(n) = f(n-u) + u$$

Resumo

se

$$f(n) = f(n-1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1$$

então

$$f(n) = f(n-u) + u, \text{ onde } u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid n - k < 1\}$$

Resumo

se

$$f(n) = f(n-1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1$$

então

$$f(n) = f(n-u) + u, \text{ onde } u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid n-k < 1\} = n$$

Resumo

se

$$f(n) = f(n-1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1$$

então

$$f(n) = f(n-u) + u, \text{ onde } u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid n - k < 1\} = n$$

$$f(n) = f(n-u) + u$$

Resumo

se

$$f(n) = f(n-1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1$$

então

$$f(n) = f(n-u) + u, \text{ onde } u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid n - k < 1\} = n$$

$$f(n) = f(n-u) + u = f(n-n) + n$$

Resumo

se

$$f(n) = f(n-1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1$$

então

$$f(n) = f(n-u) + u, \text{ onde } u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid n - k < 1\} = n$$

$$f(n) = f(n-u) + u = f(n-n) + n = f(0) + n$$

Resumo

Resumo

se

$$f(n) = f(n-1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1$$

Resumo

se

$$f(n) = f(n-1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1$$

então

$$f(n) = f(0) + n, \text{ para todo } n \geq 1$$