Matemática Discreta

Unidade 27: Recorrências Lineares Homogêneas (1)

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Recorrência Linear Homogênea (RLH)

Recorrência Linear Homogênea (RLH)

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k$$

Recorrência Linear Homogênea (RLH)

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k$$

$$a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$$

Recorrência Linear Homogênea (RLH)

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k$$

$a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$

Exemplo: $$f(n) = f(n-1) + f(n-2), \text{ para todo } n \geq 2$$

Soma de funções $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$

Soma de funções $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$

A, B

Soma de funções $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$

A, B: conjuntos

Soma de funções $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$

A, B: conjuntos

B^A

Soma de funções $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$

A, B: conjuntos

B^A: conjunto das funções $A \to B$

Soma de funções $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$

A, B: conjuntos

B^A: conjunto das funções $A \to B$

$f, g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Soma de funções $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$

A, B: conjuntos

B^A: conjunto das funções $A \ \to \ B$

$f, g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$f + g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Soma de funções $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$

A, B: conjuntos

B^A: conjunto das funções $A \; \to \; B$

$f, g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$f + g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$$(f + g)(n)$$

Soma de funções $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$

A, B: conjuntos

B^A: conjunto das funções $A \to B$

$f, g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$f + g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n)$$

Soma de funções $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$

A, B: conjuntos

B^A: conjunto das funções $A \ \to \ B$

$f, g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$f + g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n)$$

Exemplo: $f(n) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Soma de funções $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$

A, B: conjuntos

B^A: conjunto das funções $A \to B$

$f, g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$f + g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n)$$

Exemplo: $f(n) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ $g(n) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Soma de funções $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$

A, B: conjuntos

B^A: conjunto das funções $A \ \to \ B$

$f, g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$f + g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n)$$

Exemplo: $f(n) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ $g(n) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$$(f + g)(n)$$

Soma de funções $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$

A, B: conjuntos

B^A: conjunto das funções $A \ \to \ B$

$f, g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$f + g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n)$$

Exemplo: $f(n) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ $g(n) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n)$$

Soma de funções $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$

A, B: conjuntos

B^A: conjunto das funções $A \ \to \ B$

$f, g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$f + g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n)$$

Exemplo: $f(n) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ $g(n) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Múltiplo de função $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$

Múltiplo de função $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$

$z \in \mathbb{C}$

Múltiplo de função $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$

$z \in \mathbb{C}$

$f \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Múltiplo de função $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$

$z \in \mathbb{C}$

$f \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$zf \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Múltiplo de função $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$

$z \in \mathbb{C}$

$f \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$zf \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$$(zf)(n)$$

Múltiplo de função $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$

$z \in \mathbb{C}$

$f \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$zf \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$$(zf)(n) = zf(n)$$

Múltiplo de função $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$

$z \in \mathbb{C}$

$f \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$zf \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$$(zf)(n) = zf(n)$$

Exemplo:

Múltiplo de função $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$

$z \in \mathbb{C}$

$f \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$zf \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$$(zf)(n) = zf(n)$$

Exemplo: $z = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Múltiplo de função $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$

$z \in \mathbb{C}$

$f \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$zf \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$$(zf)(n) = zf(n)$$

Exemplo: $z = \frac{\sqrt{5}}{5}$ $f(n) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Múltiplo de função $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$

$z \in \mathbb{C}$

$f \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$zf \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$$(zf)(n) = zf(n)$$

Exemplo: $z = \frac{\sqrt{5}}{5}$ $f(n) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$$(zf)(n)$$

Múltiplo de função $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$

$z \in \mathbb{C}$

$f \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$zf \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$$(zf)(n) = zf(n)$$

Exemplo: $z = \frac{\sqrt{5}}{5}$ $f(n) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$$(zf)(n) = zf(n)$$

Múltiplo de função $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$

$z \in \mathbb{C}$

$f \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$zf \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$$(zf)(n) = zf(n)$$

Exemplo: $z = \frac{\sqrt{5}}{5}$ $f(n) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$$(zf)(n) = zf(n) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Teorema 30

Teorema 30

$(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$

Teorema 30

$(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$

Demonstração.

Exercício 116 $\square$

Funções que satisfazem a recorrência de Fibonacci

Funções que satisfazem a recorrência de Fibonacci

$\mathcal{F} \subseteq \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Funções que satisfazem a recorrência de Fibonacci

$\mathcal{F} \subseteq \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$:= conjunto das funções que satisfazem a recorrência de Fibonacci

Funções que satisfazem a recorrência de Fibonacci

$\mathcal{F} \subseteq \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$:= conjunto das funções que satisfazem a recorrência de Fibonacci

$$\mathcal{F} := \left\{ f \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid f(n) = f(n-1) + f(n-2),\ \text{para todo } n \geq 2 \right\}$$

Soma de funções em $\mathcal{F}$

Soma de funções em $\mathcal{F}$

$f, g \in \mathcal{F}$

Soma de funções em $\mathcal{F}$

$f, g \in \mathcal{F}$

$$(f + g)(n)$$

Soma de funções em $\mathcal{F}$

$f, g \in \mathcal{F}$

$$(f+g)(n) = f(n) + g(n)$$

Soma de funções em $\mathcal{F}$

$f, g \in \mathcal{F}$

$$\begin{aligned}(f+g)(n) &= f(n) + g(n) \\ &= (f(n-1) + f(n-2)) + (g(n-1) + g(n-2))\end{aligned}$$

Soma de funções em $\mathcal{F}$

$f, g \in \mathcal{F}$

$$\begin{aligned}
(f+g)(n) &= f(n) + g(n) \\
&= (f(n-1) + f(n-2)) + (g(n-1) + g(n-2)) \\
&= (f(n-1) + g(n-1)) + (f(n-2) + g(n-2))
\end{aligned}$$

Soma de funções em $\mathcal{F}$

$f, g \in \mathcal{F}$

$$
\begin{aligned}
(f+g)(n) &= f(n) + g(n) \\
&= (f(n-1) + f(n-2)) + (g(n-1) + g(n-2)) \\
&= (f(n-1) + g(n-1)) + (f(n-2) + g(n-2)) \\
&= (f+g)(n-1) + (f+g)(n-2)
\end{aligned}
$$

Soma de funções em $\mathcal{F}$

$f, g \in \mathcal{F}$

$$
\begin{aligned}
(f+g)(n) &= f(n) + g(n) \\
&= (f(n-1) + f(n-2)) + (g(n-1) + g(n-2)) \\
&= (f(n-1) + g(n-1)) + (f(n-2) + g(n-2)) \\
&= (f+g)(n-1) + (f+g)(n-2)
\end{aligned}
$$

soma de funções em $\mathcal{F}$ é função em $\mathcal{F}$

Múltiplos de funções em $\mathcal{F}$

Múltiplos de funções em $\mathcal{F}$

$f \in \mathcal{F}$

Múltiplos de funções em $\mathcal{F}$

$f \in \mathcal{F}$

$(zf)(n)$

Múltiplos de funções em $\mathcal{F}$

$f \in \mathcal{F}$

$(zf)(n) = z(f(n))$

Múltiplos de funções em $\mathcal{F}$

$f \in \mathcal{F}$

$(zf)(n) = z(f(n)) = z(f(n-1)+f(n-2))$

Múltiplos de funções em $\mathcal{F}$

$f \in \mathcal{F}$

$$(zf)(n) = z(f(n)) = z(f(n-1)+f(n-2)) = zf(n-1)+zf(n-2)$$

Múltiplos de funções em $\mathcal{F}$

$f \in \mathcal{F}$

$$(zf)(n) = z(f(n)) = z(f(n-1)+f(n-2)) = zf(n-1)+zf(n-2) = (zf)(n-1)+(zf)(n-2)$$

Múltiplos de funções em $\mathcal{F}$

$f \in \mathcal{F}$

$$(zf)(n) = z(f(n)) = z(f(n-1)+f(n-2)) = zf(n-1)+zf(n-2) = (zf)(n-1)+(zf)(n-2)$$

múltiplo de função em $\mathcal{F}$ é função em $\mathcal{F}$

Resumo

Resumo

$\mathcal{F}$

Resumo

$\mathcal{F}$: funções que satisfazem a recorrência de Fibonacci

Resumo

$\mathcal{F}$: funções que satisfazem a recorrência de Fibonacci

se $f, g \in \mathcal{F}$ e $z \in \mathbb{C}$

Resumo

$\mathcal{F}$: funções que satisfazem a recorrência de Fibonacci

se $f, g \in \mathcal{F}$ e $z \in \mathbb{C}$ então $f + g \in \mathcal{F}$

Resumo

$\mathcal{F}$: funções que satisfazem a recorrência de Fibonacci

se $f, g \in \mathcal{F}$ e $z \in \mathbb{C}$ então $f + g \in \mathcal{F}$ e $zf \in \mathcal{F}$

Resumo

$\mathcal{F}$: funções que satisfazem a recorrência de Fibonacci

se $f, g \in \mathcal{F}$ e $z \in \mathbb{C}$ então $f + g \in \mathcal{F}$ e $zf \in \mathcal{F}$

$\mathcal{F}$ é subespaço vetorial de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Resumo

$\mathcal{F}$: funções que satisfazem a recorrência de Fibonacci

se $f, g \in \mathcal{F}$ e $z \in \mathbb{C}$ então $f + g \in \mathcal{F}$ e $zf \in \mathcal{F}$

$\mathcal{F}$ é subespaço vetorial de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de dimensão 2

Resumo

$\mathcal{F}$: funções que satisfazem a recorrência de Fibonacci

se $f, g \in \mathcal{F}$ e $z \in \mathbb{C}$ então $f + g \in \mathcal{F}$ e $zf \in \mathcal{F}$

$\mathcal{F}$ é subespaço vetorial de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de dimensão 2 (Ex. 118)

Resumo

$\mathcal{F}$: funções que satisfazem a recorrência de Fibonacci

se $f, g \in \mathcal{F}$ e $z \in \mathbb{C}$ então $f + g \in \mathcal{F}$ e $zf \in \mathcal{F}$

$\mathcal{F}$ é subespaço vetorial de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de dimensão 2 (Ex. 118)

$\{f_1, f_2\}$

Resumo

$\mathcal{F}$: funções que satisfazem a recorrência de Fibonacci

se $f, g \in \mathcal{F}$ e $z \in \mathbb{C}$ então $f + g \in \mathcal{F}$ e $zf \in \mathcal{F}$

$\mathcal{F}$ é subespaço vetorial de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de dimensão 2 (Ex. 118)

$\{f_1, f_2\}$: base de $\mathcal{F}$

Resumo

$\mathcal{F}$: funções que satisfazem a recorrência de Fibonacci

se $f, g \in \mathcal{F}$ e $z \in \mathbb{C}$ então $f + g \in \mathcal{F}$ e $zf \in \mathcal{F}$

$\mathcal{F}$ é subespaço vetorial de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de dimensão 2 (Ex. 118)

$\{f_1, f_2\}$: base de $\mathcal{F}$

toda função de $f \in \mathcal{F}$ pode ser escrita como combinação linear de f_1 e f_2

Resumo

$\mathcal{F}$: funções que satisfazem a recorrência de Fibonacci

se $f, g \in \mathcal{F}$ e $z \in \mathbb{C}$ então $f + g \in \mathcal{F}$ e $zf \in \mathcal{F}$

$\mathcal{F}$ é subespaço vetorial de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de dimensão 2 (Ex. 118)

$\{f_1, f_2\}$: base de $\mathcal{F}$

toda função de $f \in \mathcal{F}$ pode ser escrita como combinação linear de f_1 e f_2

$f(n) = c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n),$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Comportamento Assintótico da Recorrência de Fibonacci

Comportamento Assintótico da Recorrência de Fibonacci

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$$

Comportamento Assintótico da Recorrência de Fibonacci

$$\begin{aligned} f(n) &= f(n-1) + f(n-2), \\ f^{-}(n) &= f^{-}(n-2) + f^{-}(n-2) \end{aligned}$$

Comportamento Assintótico da Recorrência de Fibonacci

$$
\begin{aligned}
f(n) &= f(n-1) + f(n-2), \\
f^{-}(n) &= f^{-}(n-2) + f^{-}(n-2), \\
f^{+}(n) &= f^{+}(n-1) + f^{+}(n-1)
\end{aligned}
$$

Comportamento Assintótico da Recorrência de Fibonacci

$$\begin{aligned} f(n) &= f(n-1) + f(n-2), \\ f^-(n) &= f^-(n-2) + f^-(n-2), \\ f^+(n) &= f^+(n-1) + f^+(n-1), \text{ para todo } n \geq 4 \end{aligned}$$

Comportamento Assintótico da Recorrência de Fibonacci

$$\begin{aligned}
f(n) &= f(n-1) + f(n-2), \\
f^-(n) &= f^-(n-2) + f^-(n-2), \\
f^+(n) &= f^+(n-1) + f^+(n-1), \text{ para todo } n \geq 4
\end{aligned}$$

$f^-(2) = f(2) = f^+(2)$

Comportamento Assintótico da Recorrência de Fibonacci

$$
\begin{aligned}
f(n) &= f(n-1) + f(n-2), \\
f^-(n) &= f^-(n-2) + f^-(n-2), \\
f^+(n) &= f^+(n-1) + f^+(n-1), \text{ para todo } n \geq 4
\end{aligned}
$$

$f^-(2) = f(2) = f^+(2)$ e $f^-(3) = f(3) = f^+(3)$

Comportamento Assintótico da Recorrência de Fibonacci

$$\begin{array}{rcl} f(n) & = & f(n-1) + f(n-2), \\ f^-(n) & = & f^-(n-2) + f^-(n-2), \\ f^+(n) & = & f^+(n-1) + f^+(n-1), \text{ para todo } n \geq 4 \end{array}$$

$f^-(2) = f(2) = f^+(2)$ e $f^-(3) = f(3) = f^+(3)$

$$f^-(n) \leq f(n) \leq f^+(n), \text{ para todo } n \geq 2$$

Comportamento Assintótico da Recorrência de Fibonacci

$$
\begin{aligned}
f(n) &= f(n-1) + f(n-2), \\
f^{-}(n) &= f^{-}(n-2) + f^{-}(n-2), \\
f^{+}(n) &= f^{+}(n-1) + f^{+}(n-1), \text{ para todo } n \geq 4
\end{aligned}
$$

$f^{-}(2) = f(2) = f^{+}(2)$ e $f^{-}(3) = f(3) = f^{+}(3)$

$f^{-}(n) \leq f(n) \leq f^{+}(n)$, para todo $n \geq 2$ (Exercício 90)

Comportamento Assintótico da Recorrência de Fibonacci

Comportamento Assintótico da Recorrência de Fibonacci

$$f^-(n) = 2f^-(n-2), \text{ para todo } n \geq 4$$

Comportamento Assintótico da Recorrência de Fibonacci

$$
\begin{aligned}
f^-(n) &= 2f^-(n-2), \text{ para todo } n \geq 4, \\
f^+(n) &= 2f^+(n-1), \text{ para todo } n \geq 4
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} f^-(n) &= 2f^-(n-2), \text{ para todo } n \geq 4, \\ f^+(n) &= 2f^+(n-1), \text{ para todo } n \geq 4 \end{aligned}$$

Exercício 110:

$$f^-(n) = (\sqrt{2})^{n+(n \bmod 2)}, \text{ para todo } n \geq 4$$

Comportamento Assintótico da Recorrência de Fibonacci

$$
\begin{aligned}
f^-(n) &= 2f^-(n-2), \text{ para todo } n \geq 4,\\
f^+(n) &= 2f^+(n-1), \text{ para todo } n \geq 4
\end{aligned}
$$

Exercício 110:

$$
\begin{aligned}
f^-(n) &= (\sqrt{2})^{n+(n \bmod 2)}, \text{ para todo } n \geq 4,\\
f^+(n) &= 2^{n-2}, \text{ para todo } n \geq 4
\end{aligned}
$$

Comportamento Assintótico da Recorrência de Fibonacci

$$\begin{aligned} f^-(n) &= 2f^-(n-2), \text{ para todo } n \geq 4, \\ f^+(n) &= 2f^+(n-1), \text{ para todo } n \geq 4 \end{aligned}$$

Exercício 110:

$$\begin{aligned} f^-(n) &= (\sqrt{2})^{n+(n \bmod 2)}, \text{ para todo } n \geq 4, \\ f^+(n) &= 2^{n-2}, \text{ para todo } n \geq 4 \end{aligned}$$

$$(\sqrt{2})^{n+(n \bmod 2)} \leq f(n) \leq 2^{n-2} \qquad , \text{ para todo } n \geq 4$$

Comportamento Assintótico da Recorrência de Fibonacci

$$
\begin{aligned}
f^-(n) &= 2f^-(n-2), \text{ para todo } n \geq 4, \\
f^+(n) &= 2f^+(n-1), \text{ para todo } n \geq 4
\end{aligned}
$$

Exercício 110:

$$
\begin{aligned}
f^-(n) &= (\sqrt{2})^{n+(n \bmod 2)}, \text{ para todo } n \geq 4, \\
f^+(n) &= 2^{n-2}, \text{ para todo } n \geq 4
\end{aligned}
$$

$$
(\sqrt{2})^n \leq (\sqrt{2})^{n+(n \bmod 2)} \leq f(n) \leq 2^{n-2} \qquad , \text{ para todo } n \geq 4
$$

Comportamento Assintótico da Recorrência de Fibonacci

$$
\begin{aligned}
f^-(n) &= 2f^-(n-2), \text{ para todo } n \geq 4, \\
f^+(n) &= 2f^+(n-1), \text{ para todo } n \geq 4
\end{aligned}
$$

Exercício 110:

$$
\begin{aligned}
f^-(n) &= (\sqrt{2})^{n+(n \bmod 2)}, \text{ para todo } n \geq 4, \\
f^+(n) &= 2^{n-2}, \text{ para todo } n \geq 4
\end{aligned}
$$

$$
(\sqrt{2})^n \leq (\sqrt{2})^{n+(n \bmod 2)} \leq f(n) \leq 2^{n-2} \leq 2^n, \text{ para todo } n \geq 4
$$

Comportamento Assintótico da Recorrência de Fibonacci

$$\begin{aligned} f^-(n) &= 2f^-(n-2), \text{ para todo } n \geq 4, \\ f^+(n) &= 2f^+(n-1), \text{ para todo } n \geq 4 \end{aligned}$$

Exercício 110:

$$\begin{aligned} f^-(n) &= (\sqrt{2})^{n+(n \bmod 2)}, \text{ para todo } n \geq 4, \\ f^+(n) &= 2^{n-2}, \text{ para todo } n \geq 4 \end{aligned}$$

$$(\sqrt{2})^n \leq (\sqrt{2})^{n+(n \bmod 2)} \leq f(n) \leq 2^{n-2} \leq 2^n, \text{ para todo } n \geq 4$$

funções que satisfazem a recorrência de Fibonacci tem comportamento exponencial

Uma função exponencial em $\mathcal{F}$?

Uma função exponencial em $\mathcal{F}$?

r

Uma função exponencial em $\mathcal{F}$?

$r \in \mathbb{C}$

Uma função exponencial em $\mathcal{F}$?

$r \in \mathbb{C}$

$f(n) = r^n$

Uma função exponencial em $\mathcal{F}$?

$r \in \mathbb{C}$

$f(n) = r^n \in \mathcal{F}$

Uma função exponencial em $\mathcal{F}$?

$r \in \mathbb{C}$

$f(n) = r^n \in \mathcal{F} \implies f(n) = f(n-1) + f(n-2),$ para todo $n \geq 2$

Uma função exponencial em $\mathcal{F}$?

$r \in \mathbb{C}$

$f(n) = r^n \in \mathcal{F} \implies f(n) = f(n-1) + f(n-2),$ para todo $n \geq 2$

$r^n = r^{n-1} + r^{n-2}$

Uma função exponencial em $\mathcal{F}$?

$r \in \mathbb{C}$

$f(n) = r^n \in \mathcal{F} \implies f(n) = f(n-1) + f(n-2),$ para todo $n \geq 2$

$r^n = r^{n-1} + r^{n-2}$

$r^n - r^{n-1} - r^{n-2} = 0$

Uma função exponencial em $\mathcal{F}$?

$r \in \mathbb{C}$

$f(n) = r^n \in \mathcal{F} \implies f(n) = f(n-1) + f(n-2), \text{ para todo } n \geq 2$

$r^n = r^{n-1} + r^{n-2}$

$r^n - r^{n-1} - r^{n-2} = 0$

$r^{n-2}(r^2 - r - 1) = 0$

Uma função exponencial em $\mathcal{F}$?

$r \in \mathbb{C}$

$f(n) = r^n \in \mathcal{F} \implies f(n) = f(n-1) + f(n-2),$ para todo $n \geq 2$

$r^n = r^{n-1} + r^{n-2}$

$r^n - r^{n-1} - r^{n-2} = 0$

$r^{n-2}(r^2 - r - 1) = 0$

$r^{n-2} = 0$

Uma função exponencial em $\mathcal{F}$?

$r \in \mathbb{C}$

$f(n) = r^n \in \mathcal{F} \implies f(n) = f(n-1) + f(n-2),$ para todo $n \geq 2$

$r^n = r^{n-1} + r^{n-2}$

$r^n - r^{n-1} - r^{n-2} = 0$

$r^{n-2}(r^2 - r - 1) = 0$

$r^{n-2} = 0$ ou $(r^2 - r - 1) = 0$

Uma função exponencial em $\mathcal{F}$?

$r \in \mathbb{C}$

$f(n) = r^n \in \mathcal{F} \implies f(n) = f(n-1) + f(n-2),$ para todo $n \geq 2$

$r^n = r^{n-1} + r^{n-2}$

$r^n - r^{n-1} - r^{n-2} = 0$

$r^{n-2}(r^2 - r - 1) = 0$

$r^{n-2} = 0$ ou $(r^2 - r - 1) = 0$

$r = 0$

Uma função exponencial em $\mathcal{F}$?

$r \in \mathbb{C}$

$f(n) = r^n \in \mathcal{F} \implies f(n) = f(n-1) + f(n-2),$ para todo $n \geq 2$

$r^n = r^{n-1} + r^{n-2}$

$r^n - r^{n-1} - r^{n-2} = 0$

$r^{n-2}(r^2 - r - 1) = 0$

$r^{n-2} = 0$ ou $(r^2 - r - 1) = 0$

$r = 0$ ou $r = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Base de $\mathcal{F}$

Base de $\mathcal{F}$

$$\{f_1(n), f_2(n)\}$$

Base de $\mathcal{F}$

$\{f_1(n), f_2(n)\}$: $\qquad f_1(n) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Base de $\mathcal{F}$

$\{f_1(n), f_2(n)\}$: $\qquad f_1(n) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad f_2(n) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Base de $\mathcal{F}$

$\{f_1(n), f_2(n)\}$: $\quad f_1(n) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad f_2(n) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$f(n) \in \mathcal{F}$

Base de $\mathcal{F}$

$\{f_1(n), f_2(n)\}$: $\qquad f_1(n) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad f_2(n) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$f(n) \in \mathcal{F} \implies f(n) = c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n)$

Base de $\mathcal{F}$

$\{f_1(n), f_2(n)\}$: $\quad f_1(n) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad f_2(n) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$$f(n) \in \mathcal{F} \implies f(n) = c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n) = c_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Solução da Sequência de Fibonacci

Solução da Sequência de Fibonacci

$$F(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ F(n-2) + F(n-1), & \text{se } n > 1, \end{cases}$$

Solução da Sequência de Fibonacci

$$F(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ F(n-2) + F(n-1), & \text{se } n > 1, \end{cases}$$

$$F(n) = c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n)$$

Solução da Sequência de Fibonacci

$$F(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ F(n-2) + F(n-1), & \text{se } n > 1, \end{cases}$$

$$F(n) = c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n)$$

$$\begin{aligned} F(0) &= c_1 f_1(0) + c_2 f_2(0), \text{ e} \\ F(1) &= c_1 f_1(1) + c_2 f_2(1) \end{aligned}$$

Solução da Sequência de Fibonacci

$$F(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ F(n-2) + F(n-1), & \text{se } n > 1, \end{cases}$$

$$F(n) = c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n)$$

$$\begin{aligned} F(0) &= c_1 f_1(0) + c_2 f_2(0), \text{ e} \\ F(1) &= c_1 f_1(1) + c_2 f_2(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^0 + c_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^0, \text{ e} \\ 1 &= c_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1 + c_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 \end{aligned}$$

Solução da Sequência de Fibonacci

$$\begin{aligned} 0 &= c_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 + c_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0, \text{ e} \\ 1 &= c_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 + c_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 \end{aligned}$$

Solução da Sequência de Fibonacci

$$\begin{aligned} 0 &= c_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 + c_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0, \text{ e} \\ 1 &= c_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 + c_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 \end{aligned}$$

$c_1 = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

Solução da Sequência de Fibonacci

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 + c_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0, \text{ e} \\ 1 &= c_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 + c_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 \end{aligned}$$

$c_1 = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ $\qquad$ $c_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Solução da Sequência de Fibonacci

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 + c_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0, \text{ e} \\ 1 &= c_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 + c_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 \end{aligned}$$

$c_1 = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ $\qquad$ $c_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$$F(n) = -\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Solução da Sequência de Fibonacci

$$\begin{aligned} 0 &= c_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 + c_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0, \text{ e} \\ 1 &= c_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 + c_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 \end{aligned}$$

$c_1 = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ $\qquad$ $c_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$$\begin{aligned} F(n) &= -\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \end{aligned}$$

Resumo

Resumo

1. $\mathcal{F}$: conjunto das funções que satisfazem
   $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$, para todo $n \geq 2$

Resumo

1. $\mathcal{F}$: conjunto das funções que satisfazem
   $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$, para todo $n \geq 2$
2. $\mathcal{F}$ é subespaço vetorial de dimensão 2 de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Resumo

1. $\mathcal{F}$: conjunto das funções que satisfazem
   $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$, para todo $n \geq 2$
2. $\mathcal{F}$ é subespaço vetorial de dimensão 2 de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$
3. r_1 e r_2: raízes de $X^2 - X - 1$

Resumo

1. $\mathcal{F}$: conjunto das funções que satisfazem
   $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$, para todo $n \geq 2$
2. $\mathcal{F}$ é subespaço vetorial de dimensão 2 de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$
3. r_1 e r_2: raízes de $X^2 - X - 1$
4. $\{r_1^n, r_2^n\}$ é uma base de $\mathcal{F}$

Resumo

1. $\mathcal{F}$: conjunto das funções que satisfazem
   $f(n) = f(n-1) + f(n-2),$ para todo $n \geq 2$
2. $\mathcal{F}$ é subespaço vetorial de dimensão 2 de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$
3. r_1 e r_2: raízes de $X^2 - X - 1$
4. $\{r_1^n, r_2^n\}$ é uma base de $\mathcal{F}$
5. toda $f \in \mathcal{F}$ pode ser escrita na forma $f(n) = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$

Resumo

1. $\mathcal{F}$: conjunto das funções que satisfazem
   $f(n) = f(n-1) + f(n-2), \text{ para todo } n \geq 2$
2. $\mathcal{F}$ é subespaço vetorial de dimensão 2 de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$
3. r_1 e r_2: raízes de $X^2 - X - 1$
4. $\{r_1^n, r_2^n\}$ é uma base de $\mathcal{F}$
5. toda $f \in \mathcal{F}$ pode ser escrita na forma $f(n) = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$
6. os valores de c_1 e c_2 são dados pelo sistema

$$\begin{aligned} f(0) &= c_1 r_1^0 + c_2 r_2^0, \\ f(1) &= c_1 r_1^1 + c_2 r_2^1 \end{aligned}$$