

Matemática Discreta

Unidade 28: Recorrências Lineares Homogêneas (2)

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Definições

Definições

$$a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$$

Definições

$$a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$$

$$\mathcal{R}(a_1, \dots, a_k)$$

Definições

$$a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$$

$\mathcal{R}(a_1, \dots, a_k)$: conjunto das funções que satisfazem

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \dots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k$$

Definições

$$a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$$

$\mathcal{R}(a_1, \dots, a_k)$: conjunto das funções que satisfazem

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \dots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k$$

$$\mathcal{R}(a_1, \dots, a_k) := \{f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \mid \\ f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \dots + a_k f(n-k), \\ \text{para todo } n \geq k\}$$

Definições

$$a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$$

$\mathcal{R}(a_1, \dots, a_k)$: conjunto das funções que satisfazem

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \dots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k$$

$$\mathcal{R}(a_1, \dots, a_k) := \{f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \mid \\ f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \dots + a_k f(n-k), \\ \text{para todo } n \geq k\}$$

$$X^k - a_1 X^{k-1} - \dots - a_{k-1} X^1 - a_k$$

Definições

$$a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$$

$\mathcal{R}(a_1, \dots, a_k)$: conjunto das funções que satisfazem

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \dots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k$$

$$\mathcal{R}(a_1, \dots, a_k) := \{f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \mid \\ f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \dots + a_k f(n-k), \\ \text{para todo } n \geq k\}$$

$X^k - a_1 X^{k-1} - \dots - a_{k-1} X^1 - a_k$: **polinômio característico (PC)** de $\mathcal{R}(a_1, \dots, a_k)$

Corolário 31

Corolário 31

$\mathcal{R}(a_1, \dots, a_k)$ é um subespaço vetorial de $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$

Corolário 31

$\mathcal{R}(a_1, \dots, a_k)$ é um subespaço vetorial de $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$

Demonstração.

Exercício 118



Teorema 32

Teorema 32

r é raiz de multiplicidade m do PC de $\mathcal{R}(a_1, \dots, a_k)$

Teorema 32

r é raiz de multiplicidade m do PC de $\mathcal{R}(a_1, \dots, a_k)$



Teorema 32

r é raiz de multiplicidade m do PC de $\mathcal{R}(a_1, \dots, a_k)$



m é o maior inteiro tal que $n^{m-1}r^n \in \mathcal{R}(a_1, \dots, a_k)$

Teorema 32

r é raiz de multiplicidade m do PC de $\mathcal{R}(a_1, \dots, a_k)$



m é o maior inteiro tal que $n^{m-1}r^n \in \mathcal{R}(a_1, \dots, a_k)$

Convenção: $m = 1$

Teorema 32

r é raiz de multiplicidade m do PC de $\mathcal{R}(a_1, \dots, a_k)$



m é o maior inteiro tal que $n^{m-1}r^n \in \mathcal{R}(a_1, \dots, a_k)$

Convenção: $m = 1: n^0 r^n$

Teorema 32

r é raiz de multiplicidade m do PC de $\mathcal{R}(a_1, \dots, a_k)$



m é o maior inteiro tal que $n^{m-1}r^n \in \mathcal{R}(a_1, \dots, a_k)$

Convenção: $m = 1: n^0 r^n := r^n$

Corolário 33

$$n^{m-1}r^n \in \mathcal{R}(a_1, \dots, a_k)$$

$$n^{m-1}r^n \in \mathcal{R}(a_1, \dots, a_k)$$



$$r^{m-1} \in \mathcal{R}(a_1, \dots, a_k)$$



$(X - r)^m$ divide o PC de $\mathcal{R}(a_1, \dots, a_k)$

$$n^{m-1}r^n \in \mathcal{R}(a_1, \dots, a_k)$$



$$(X - r)^m \text{ divide o PC de } \mathcal{R}(a_1, \dots, a_k)$$

Lembrete: $(X - r)^m$ divide P

$$r^{m-1} \in \mathcal{R}(a_1, \dots, a_k)$$



$$(X - r)^m \text{ divide o PC de } \mathcal{R}(a_1, \dots, a_k)$$

Lembrete: $(X - r)^m$ divide $P \Leftrightarrow (X - r)^j$ divide P , para todo $j \leq m$

Corolário 34

Corolário 34

r é raiz de multiplicidade m do PC de $\mathcal{R}(a_1, \dots, a_k)$

Corolário 34

r é raiz de multiplicidade m do PC de $\mathcal{R}(a_1, \dots, a_k)$



$$B(r) = \{n^j r^n \mid 0 \leq j < m\}$$

r é raiz de multiplicidade m do PC de $\mathcal{R}(a_1, \dots, a_k)$



$B(r) = \{t^j r^j \mid 0 \leq j < m\}$ é linearmente independente em $\mathcal{R}(a_1, \dots, a_k)$

Corolário 35

$$r_1, \dots, r_l$$

r_1, \dots, r_l : raízes distintas do PC de $\mathcal{R}(a_1, \dots, a_k)$

r_1, \dots, r_l : raízes distintas do PC de $\mathcal{R}(a_1, \dots, a_k)$

$$B(r_1) \cup B(r_2) \cup \dots \cup B(r_l)$$

r_1, \dots, r_l : raízes distintas do PC de $\mathcal{R}(a_1, \dots, a_k)$

$B(r_1) \cup B(r_2) \cup \dots \cup B(r_l)$ é base de $\mathcal{R}(a_1, \dots, a_k)$

Corolário 36

Corolário 36

se $f(n) = a_1f(n-1) + \dots + a_kf(n-k)$, para todo $n \geq k$

Corolário 36

se $f(n) = a_1 f(n-1) + \dots + a_k f(n-k)$, para todo $n \geq k$

então $f(n) = \sum_{i=1}^l \left(\sum_{j=0}^{m_i-1} c_{i,j} n^j r_i^n \right)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Corolário 36

se $f(n) = a_1 f(n-1) + \dots + a_k f(n-k)$, para todo $n \geq k$

então $f(n) = \sum_{i=1}^l \left(\sum_{j=0}^{m_i-1} c_{i,j} n^j r_i^n \right)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

onde

r_1, \dots, r_l

Corolário 36

se $f(n) = a_1 f(n-1) + \dots + a_k f(n-k)$, para todo $n \geq k$

então $f(n) = \sum_{i=1}^l \left(\sum_{j=0}^{m_i-1} c_{i,j} n^j r_i^n \right)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

onde

r_1, \dots, r_l : distintas raízes de $X^k - a_1 X^{k-1} - \dots - a_{k-1} X^1 - a_k$

Corolário 36

se $f(n) = a_1 f(n-1) + \dots + a_k f(n-k)$, para todo $n \geq k$

então $f(n) = \sum_{i=1}^l \left(\sum_{j=0}^{m_i-1} c_{i,j} n^j r_i^n \right)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

onde

r_1, \dots, r_l : distintas raízes de $X^k - a_1 X^{k-1} - \dots - a_{k-1} X^1 - a_k$

m_i

Corolário 36

se $f(n) = a_1 f(n-1) + \dots + a_k f(n-k)$, para todo $n \geq k$

então $f(n) = \sum_{i=1}^l \left(\sum_{j=0}^{m_i-1} c_{i,j} n^j r_i^n \right)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

onde

r_1, \dots, r_l : distintas raízes de $X^k - a_1 X^{k-1} - \dots - a_{k-1} X - a_k$

m_i : multiplicidade de r_i

Corolário 36

se $f(n) = a_1 f(n-1) + \dots + a_k f(n-k)$, para todo $n \geq k$

então $f(n) = \sum_{i=1}^l \left(\sum_{j=0}^{m_i-1} c_{i,j} n^j r_i^n \right)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

onde

r_1, \dots, r_l : distintas raízes de $X^k - a_1 X^{k-1} - \dots - a_{k-1} X^1 - a_k$

m_i : multiplicidade de r_i ; $c_{i,j}$

Corolário 36

se $f(n) = a_1 f(n-1) + \dots + a_k f(n-k)$, para todo $n \geq k$

então $f(n) = \sum_{i=1}^l \left(\sum_{j=0}^{m_i-1} c_{i,j} n^j r_i^n \right)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

onde

r_1, \dots, r_l : distintas raízes de $X^k - a_1 X^{k-1} - \dots - a_{k-1} X^1 - a_k$

m_i : multiplicidade de r_i ; $c_{i,j}$: solução do sistema

Corolário 36

se $f(n) = a_1 f(n-1) + \dots + a_k f(n-k)$, para todo $n \geq k$

então $f(n) = \sum_{i=1}^l \left(\sum_{j=0}^{m_i-1} c_{i,j} n^j r_i^n \right)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

onde

r_1, \dots, r_l : distintas raízes de $X^k - a_1 X^{k-1} - \dots - a_{k-1} X^1 - a_k$

m_i : multiplicidade de r_i ; $c_{i,j}$: solução do sistema

$$f(0) = \sum_{i=1}^l \left(\sum_{j=0}^{m_i-1} c_{i,j} 0^j r_i^0 \right)$$

Corolário 36

se $f(n) = a_1 f(n-1) + \dots + a_k f(n-k)$, para todo $n \geq k$

então $f(n) = \sum_{i=1}^l \left(\sum_{j=0}^{m_i-1} c_{i,j} n^j r_i^n \right)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

onde

r_1, \dots, r_l : distintas raízes de $X^k - a_1 X^{k-1} - \dots - a_{k-1} X^1 - a_k$

m_i : multiplicidade de r_i ; $c_{i,j}$: solução do sistema

$$\begin{aligned} f(0) &= \sum_{i=1}^l \left(\sum_{j=0}^{m_i-1} c_{i,j} 0^j r_i^0 \right) \\ &\vdots \\ &= \vdots \\ f(k-1) &= \sum_{i=1}^l \left(\sum_{j=0}^{m_i-1} c_{i,j} (k-1)^j r_i^{k-1} \right) \end{aligned}$$