Matemática Discreta

Unidade 29: Recorrências Lineares Homogêneas (3)

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Exercicio 119a

a)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 2 \\ 5f(n-1) - 7f(n-2) + 3f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Exercicio 119a

a)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 2 \\ 5f(n-1) - 7f(n-2) + 3f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Seja $\mathcal{R}(5, -7, 3)$ o conjunto das funções que satisfazem $f(n)$, para todo $n \geq 3$.

Exercicio 119a

a)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 2 \\ 5f(n-1) - 7f(n-2) + 3f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Seja $\mathcal{R}(5, -7, 3)$ o conjunto das funções que satisfazem $f(n)$, para todo $n \geq 3$.
A equação de recorrência pode ser reescrita (na forma homogênea) como

$$f(n) - 5f(n-1) + 7f(n-2) - 3f(n-3) = 0.$$

Exercicio 119a

a)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 2 \\ 5f(n-1) - 7f(n-2) + 3f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Seja $\mathcal{R}(5, -7, 3)$ o conjunto das funções que satisfazem $f(n)$, para todo $n \geq 3$.
A equação de recorrência pode ser reescrita (na forma homogênea) como

$$f(n) - 5f(n-1) + 7f(n-2) - 3f(n-3) = 0.$$

Assim fica evidente que $f(n)$ satisfaz uma recorrência linear homogênea (RLH) cujo polinômio característico (PC) é

$$X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Exercicio 119a

a)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 2 \\ 5f(n-1) - 7f(n-2) + 3f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Seja $\mathcal{R}(5, -7, 3)$ o conjunto das funções que satisfazem $f(n)$, para todo $n \geq 3$.
A equação de recorrência pode ser reescrita (na forma homogênea) como

$$f(n) - 5f(n-1) + 7f(n-2) - 3f(n-3) = 0.$$

Assim fica evidente que $f(n)$ satisfaz uma recorrência linear homogênea (RLH) cujo polinômio característico (PC) é

$$X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Resta saber quais as raízes deste PC.

Exercicio 119a

Seja o PC dado por

$$X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Exercicio 119a

Seja o PC dado por

$$X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Pelo *dispositivo prático de Briot-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -5 & 7 & -3 \end{array}$$

Exercicio 119a

Seja o PC dado por

$$X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Pelo *dispositivo prático de Briot-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

$$\begin{array}{c|cccc} \color{red}{1} & 1 & -5 & 7 & -3 \\ \hline \end{array}$$

Exercicio 119a

Seja o PC dado por

$$X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Pelo *dispositivo prático de Briot-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -5 & 7 & -3 \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

Exercicio 119a

Seja o PC dado por

$$X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Pelo *dispositivo prático de Briot-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -5 & 7 & -3 \\ \hline & 1 & -4 & & \end{array}$$

Exercicio 119a

Seja o PC dado por

$$X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Pelo *dispositivo prático de Briot-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & \text{-5} & 7 & \text{-3} \\ \hline & 1 & \text{-4} & +3 & \end{array}$$

Exercicio 119a

Seja o PC dado por

$$X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Pelo *dispositivo prático de Briot-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -5 & 7 & -3 \\ \hline & 1 & -4 & +3 & 0 \end{array}$$

Exercicio 119a

Seja o PC dado por

$$X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Pelo *dispositivo prático de Briot-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

1	1	-5	7	-3
	1	-4	+3	0

Exercicio 119a

Seja o PC dado por

$$X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Pelo *dispositivo prático de Briot-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

1	1	-5	7	-3
1	1	-4	+3	0

Exercicio 119a

Seja o PC dado por

$$X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Pelo *dispositivo prático de Briot-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

1	1	-5	7	-3
1	1	-4	+3	0
	1			

Exercicio 119a

Seja o PC dado por

$$X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Pelo *dispositivo prático de Briot-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -5 & 7 & -3 \\ \hline 1 & 1 & -4 & +3 & 0 \\ \hline & 1 & -3 & & \end{array}$$

Exercicio 119a

Seja o PC dado por

$$X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Pelo *dispositivo prático de Briot-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

1	1	-5	7	-3
1	1	-4	+3	0
	1	-3	0	

Exercicio 119a

Seja o PC dado por

$$X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Pelo *dispositivo prático de Briot-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

1	1	-5	7	-3
1	1	-4	+3	0
	1	-3	0	

Exercicio 119a

Seja o PC dado por

$$X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Pelo *dispositivo prático de Briot-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

1	1	-5	7	-3
1	1	-4	+3	0
3	1	-3	0	

Exercicio 119a

Seja o PC dado por

$$X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Pelo *dispositivo prático de Briot-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

1	1	-5	7	-3
1	1	-4	+3	0
3	1	-3	0	
	1			

Exercicio 119a

Seja o PC dado por

$$X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Pelo *dispositivo prático de Briot-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

1	1	-5	7	-3
1	1	-4	+3	0
3	1	-3	0	
	1	0		

Então, tem-se que o PC é divisível por 1, 1 e 3, isto é

$$X^3 - 5X^2 + 7X - 3 = (X-1)(X-1)(X-3) = (X-1)^2(X-3).$$

Exercicio 119a

Então o conjunto $\{n^0 1^n, n^1 1^n, n^0 3^n\} = \{1^n, n1^n, 3^n\} = \{1, n, 3^n\}$ é linearmente independente em $\mathcal{R}(5, -7, 3)$.

Exercicio 119a

Então o conjunto $\{n^0 1^n, n^1 1^n, n^0 3^n\} = \{1^n, n1^n, 3^n\} = \{1, n, 3^n\}$ é linearmente independente em $\mathcal{R}(5, -7, 3)$.
Portanto, $f \in \mathcal{R}(5, -7, 3)$ pode ser escrita como uma combinação linear de $n^0 1^n$, $n^1 1^n$ e $n^0 3^n$, isto é, existem $a, b, c \in \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = a1^n + bn1^n + c3^n,$$

Exercicio 119a

Então o conjunto $\{n^0 1^n, n^1 1^n, n^0 3^n\} = \{1^n, n1^n, 3^n\} = \{1, n, 3^n\}$ é linearmente independente em $\mathcal{R}(5, -7, 3)$.
Portanto, $f \in \mathcal{R}(5, -7, 3)$ pode ser escrita como uma combinação linear de $n^0 1^n$, $n^1 1^n$ e $n^0 3^n$, isto é, existem $a, b, c \in \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = a1^n + bn1^n + c3^n,$$

ou seja

$$f(n) = a + bn + c3^n,$$

Exercicio 119a

Então o conjunto $\{n^0 1^n, n^1 1^n, n^0 3^n\} = \{1^n, n1^n, 3^n\} = \{1, n, 3^n\}$ é linearmente independente em $\mathcal{R}(5, -7, 3)$.
Portanto, $f \in \mathcal{R}(5, -7, 3)$ pode ser escrita como uma combinação linear de $n^0 1^n$, $n^1 1^n$ e $n^0 3^n$, isto é, existem $a, b, c \in \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = a1^n + bn1^n + c3^n,$$

ou seja

$$f(n) = a + bn + c3^n,$$

onde os valores de a, b e c podem ser determinados pelo sistema

$$\begin{aligned} f(0) &= a + b.0 + c.3^0, \\ f(1) &= a + b.1 + c.3^1, \\ f(2) &= a + b.2 + c.3^2, \end{aligned}$$

Exercicio 119a

ou seja,

$$
\begin{aligned}
0 &= a + 0b + 1c, \\
1 &= a + 1b + 3c, \\
2 &= a + 2b + 9c,
\end{aligned}
$$

Exercicio 119a

ou seja,

$$\begin{aligned}
0 &= a + 0b + 1c,\\
1 &= a + 1b + 3c,\\
2 &= a + 2b + 9c,
\end{aligned}$$

e portanto,

$$a = 0, b = 1, c = 0.$$

Exercicio 119a

ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= a + 0b + 1c, \\ 1 &= a + 1b + 3c, \\ 2 &= a + 2b + 9c, \end{aligned}$$

e portanto,

$$a = 0, b = 1, c = 0.$$

E portanto,

$$f(n) = n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$