Matemática Discreta

Unidade 30: Recorrências Lineares Homogêneas (4)

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Exercicio 119b

b)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 9, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 9f(n-1) - 27f(n-2) + 27f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Exercicio 119b

b)

$$f(n) = \begin{cases} 1, \text{ se } n = 0 \\ 9, \text{ se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 9f(n-1) - 27f(n-2) + 27f(n-3), \quad \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Seja $\mathcal{R}(9, -27, +27)$ o conjunto das funções que satisfazem $f(n)$, para todo $n \geq 3$.

Exercicio 119b

b)

$$f(n) = \begin{cases} 1, \text{ se } n = 0 \\ 9, \text{ se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 9f(n-1) - 27f(n-2) + 27f(n-3), \quad \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Seja $\mathcal{R}(9, -27, +27)$ o conjunto das funções que satisfazem $f(n)$, para todo $n \geq 3$.
A equação de recorrência pode ser reescrita (na forma homogênea) como

$$f(n) - 9f(n-1) + 27f(n-2) - 27f(n-3) = 0.$$

Exercicio 119b

b)

$$f(n) = \begin{cases} 1, \text{ se } n = 0 \\ 9, \text{ se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 9f(n-1) - 27f(n-2) + 27f(n-3), \quad \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Seja $\mathcal{R}(9, -27, +27)$ o conjunto das funções que satisfazem $f(n)$, para todo $n \geq 3$. A equação de recorrência pode ser reescrita (na forma homogênea) como

$$f(n) - 9f(n-1) + 27f(n-2) - 27f(n-3) = 0.$$

Assim fica evidente que $f(n)$ satisfaz uma recorrência linear homogênea (RLH) cujo polinômio característico (PC) é

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Exercicio 119b

b)

$$f(n) = \begin{cases} 1, \text{ se } n = 0 \\ 9, \text{ se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 9f(n-1) - 27f(n-2) + 27f(n-3), \quad \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Seja $\mathcal{R}(9, -27, +27)$ o conjunto das funções que satisfazem $f(n)$, para todo $n \geq 3$. A equação de recorrência pode ser reescrita (na forma homogênea) como

$$f(n) - 9f(n-1) + 27f(n-2) - 27f(n-3) = 0.$$

Assim fica evidente que $f(n)$ satisfaz uma recorrência linear homogênea (RLH) cujo polinômio característico (PC) é

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Resta saber quais as raízes deste PC.

Exercicio 119b

Seja o PC dado por

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Exercicio 119b

Seja o PC dado por

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -9 & 27 & -27 \end{array}$$

Exercicio 119b

Seja o PC dado por

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -9 & 27 & -27 \\ \hline \end{array}$$

Exercicio 119b

Seja o PC dado por

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -9 & 27 & -27 \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

Exercicio 119b

Seja o PC dado por

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

$$\begin{array}{c|cccc} \color{red}{1} & 1 & -9 & 27 & -27 \\ \hline & \color{blue}{1} & -8 & & \end{array}$$

Exercicio 119b

Seja o PC dado por

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

1	1	-9	27	-27
	1	-8	19	

Exercicio 119b

Seja o PC dado por
$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

1	1	-9	27	-27	
	1	-8	19	-8	não é raiz

Exercicio 119b

Seja o PC dado por

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

3	1	-9	27	-27

Exercicio 119b

Seja o PC dado por

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

3	1	-9	27	-27
	1			

Exercicio 119b

Seja o PC dado por

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

3	1	-9	27	-27
	1	-6		

Exercicio 119b

Seja o PC dado por

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

3	1	-9	27	-27
	1	-6	+9	

Exercicio 119b

Seja o PC dado por

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

3	1	-9	27	-27
	1	-6	+9	0

Exercicio 119b

Seja o PC dado por

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

3	1	-9	27	-27
	1	-6	+9	0

Exercicio 119b

Seja o PC dado por

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

3	1	-9	27	-27
3	1	-6	+9	0

Exercicio 119b

Seja o PC dado por

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

3	1	-9	27	-27
3	1	-6	+9	0
	1			

Exercicio 119b

Seja o PC dado por

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

3	1	-9	27	-27
3	1	-6	+9	0
	1	-3		

Exercicio 119b

Seja o PC dado por

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

3	1	-9	27	-27
3	1	-6	+9	0
	1	-3	0	

Exercicio 119b

Seja o PC dado por

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

3	1	-9	27	-27
3	1	-6	+9	0
	1	-3	0	

Exercicio 119b

Seja o PC dado por

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

3	1	-9	27	-27
3	1	-6	+9	0
3	1	-3	0	

Exercicio 119b

Seja o PC dado por

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

3	1	-9	27	-27
3	1	-6	+9	0
3	1	-3	0	
	1			

Exercicio 119b

Seja o PC dado por

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

3	1	-9	27	-27
3	1	-6	+9	0
3	1	-3	0	
	1	0		

Então, tem-se que o PC é divisível por 3, 3 e 3, isto é

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27 = (X-3)(X-3)(X-3) = (X-3)^3.$$

Exercicio 119b

Então o conjunto $\{n^0 3^n, n^1 3^n, n^2 3^n\} = \{3^n, n3^n, n^2 3^n\}$ é linearmente independente em $\mathcal{R}(9, -27, 27)$.

Exercicio 119b

Então o conjunto $\{n^0 3^n, n^1 3^n, n^2 3^n\} = \{3^n, n3^n, n^2 3^n\}$ é linearmente independente em $\mathcal{R}(9, -27, 27)$.
Portanto, $f \in \mathcal{R}(9, -27, 27)$ pode ser escrita como uma combinação linear de 3^n, $n3^n$ e $n^2 3^n$, isto é, existem $a, b, c \in \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = a3^n + bn3^n + cn^2 3^n,$$

Exercicio 119b

Então o conjunto $\{n^0 3^n, n^1 3^n, n^2 3^n\} = \{3^n, n3^n, n^2 3^n\}$ é linearmente independente em $\mathcal{R}(9, -27, 27)$.
Portanto, $f \in \mathcal{R}(9, -27, 27)$ pode ser escrita como uma combinação linear de 3^n, $n3^n$ e $n^2 3^n$, isto é, existem $a, b, c \in \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = a3^n + bn3^n + cn^2 3^n,$$

Os valores de a, b e c podem ser determinados pelo sistema

$$\begin{aligned} f(0) &= a3^0 + b.0.3^0 + c.0^2 3^0, \\ f(1) &= a3^1 + b.1.3^1 + c.1^2 3^1, \\ f(2) &= a3^2 + b.2.3^2 + c.2^2 3^2, \end{aligned}$$

Exercicio 119b

ou seja,

$$\begin{aligned} 1 &= 1a + 0b + 0c, \\ 9 &= 3a + 3b + 3c, \\ 9 &= 9a + 18b + 36c, \end{aligned}$$

Exercicio 119b

ou seja,

$$
\begin{aligned}
1 &= 1a + 0b + 0c,\\
9 &= 3a + 3b + 3c,\\
9 &= 9a + 18b + 36c,
\end{aligned}
$$

e portanto,

$$a = 1, b = 4, c = -2.$$

Exercicio 119b

ou seja,

$$\begin{aligned}1 &= 1a + 0b + 0c,\\ 9 &= 3a + 3b + 3c,\\ 9 &= 9a + 18b + 36c,\end{aligned}$$

e portanto,

$$a = 1, b = 4, c = -2.$$

E portanto,

$$f(n) = 3^n + 4n3^n - 2n^2 3^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$