Matemática Discreta

Unidade 31: Recorrências Lineares Homogêneas (5)

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Exercicio 119c

c)

$$f(n) = \begin{cases} n, \ \text{se } n \leq 1 \\ 3, \ \text{se } n = 2 \\ 7f(n-1) - 16f(n-2) + 12f(n-3), \quad \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Exercicio 119c

c)

$$f(n) = \begin{cases} n, \text{ se } n \leq 1 \\ 3, \text{ se } n = 2 \\ 7f(n-1) - 16f(n-2) + 12f(n-3), \quad \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Seja $\mathcal{R}(7, -16, +12)$ o conjunto das funções que satisfazem $f(n)$, para todo $n \geq 3$.

Exercicio 119c

c)

$$f(n) = \begin{cases} n, \text{ se } n \leq 1 \\ 3, \text{ se } n = 2 \\ 7f(n-1) - 16f(n-2) + 12f(n-3), \quad \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Seja $\mathcal{R}(7, -16, +12)$ o conjunto das funções que satisfazem $f(n)$, para todo $n \geq 3$.
A equação de recorrência pode ser reescrita (na forma homogênea) como

$$f(n) - 7f(n-1) + 16f(n-2) - 12f(n-3) = 0.$$

Exercicio 119c

c)

$$f(n) = \begin{cases} n, \text{ se } n \leq 1 \\ 3, \text{ se } n = 2 \\ 7f(n-1) - 16f(n-2) + 12f(n-3), \quad \text{ se } n \geq 3. \end{cases}$$

Seja $\mathcal{R}(7, -16, +12)$ o conjunto das funções que satisfazem $f(n)$, para todo $n \geq 3$. A equação de recorrência pode ser reescrita (na forma homogênea) como

$$f(n) - 7f(n-1) + 16f(n-2) - 12f(n-3) = 0.$$

Assim fica evidente que $f(n)$ satisfaz uma recorrência linear homogênea (RLH) cujo polinômio característico (PC) é

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Exercicio 119c

c)

$$f(n) = \begin{cases} n, \text{ se } n \leq 1 \\ 3, \text{ se } n = 2 \\ 7f(n-1) - 16f(n-2) + 12f(n-3), \quad \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Seja $\mathcal{R}(7, -16, +12)$ o conjunto das funções que satisfazem $f(n)$, para todo $n \geq 3$. A equação de recorrência pode ser reescrita (na forma homogênea) como

$$f(n) - 7f(n-1) + 16f(n-2) - 12f(n-3) = 0.$$

Assim fica evidente que $f(n)$ satisfaz uma recorrência linear homogênea (RLH) cujo polinômio característico (PC) é

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Resta saber quais as raízes deste PC.

Exercicio 119c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Exercicio 119c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -7 & 16 & -12 \end{array}$$

Exercicio 119c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -7 & 16 & -12 \\ \hline \end{array}$$

Exercicio 119c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -7 & 16 & -12 \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

Exercicio 119c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

1	1	-7	16	-12
	1	-6		

Exercicio 119c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -7 & 16 & -12 \\ \hline & 1 & -6 & 10 & \end{array}$$

Exercicio 119c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

1	1	-7	16	-12	
	1	-6	10	-2	não é raiz

Exercicio 119c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -7 & 16 & -12 \\ \hline & & & & \\ \hline \end{array}$$

Exercicio 119c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

2	1	-7	16	-12
	1			

Exercicio 119c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

2	1	-7	16	-12
	1	-5		

Exercicio 119c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

2	1	-7	16	-12
	1	-5	+6	

Exercicio 119c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

2	1	-7	16	-12
	1	-5	+6	0

Exercicio 119c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

2	1	-7	16	-12
	1	-5	+6	0

Exercicio 119c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

2	1	-7	16	-12
3	1	-5	+6	0

Exercicio 119c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

2	1	-7	16	-12
3	1	-5	+6	0
	1			

Exercicio 119c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

2	1	-7	16	-12
3	1	-5	+6	0
	1	-2		

Exercicio 119c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

2	1	-7	16	-12
3	1	-5	+6	0
	1	-2	0	

Exercicio 119c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

2	1	-7	16	-12
3	1	-5	+6	0
	1	-2	0	

Exercicio 119c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

2	1	-7	16	-12
3	1	-5	+6	0
2	1	-2	0	

Exercicio 119c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

2	1	-7	16	-12
3	1	-5	+6	0
2	1	-2	0	
	1			

Exercicio 119c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

2	1	-7	16	-12
3	1	-5	+6	0
2	1	-2	0	
	1	0		

Então, tem-se que o PC é divisível por 2, 2 e 3, isto é

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12 = (X-2)(X-2)(X-3) = (X-2)^2(X-3).$$

Exercicio 119c

Então o conjunto $\{n^0 2^n, n^1 2^n, n^2 3^n\} = \{2^n, n2^n, 3^n\}$ é linearmente independente em $\mathcal{R}(7, -16, 12)$.

Exercicio 119c

Então o conjunto $\{n^0 2^n, n^1 2^n, n^2 3^n\} = \{2^n, n2^n, 3^n\}$ é linearmente independente em $\mathcal{R}(7, -16, 12)$.
Portanto, $f \in \mathcal{R}(7, -16, 12)$ pode ser escrita como uma combinação linear de 2^n, $n2^n$ e 3^n, isto é, existem $a, b, c \in \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = a2^n + bn2^n + c3^n,$$

Exercicio 119c

Então o conjunto $\{n^0 2^n, n^1 2^n, n^2 3^n\} = \{2^n, n2^n, 3^n\}$ é linearmente independente em $\mathcal{R}(7, -16, 12)$.
Portanto, $f \in \mathcal{R}(7, -16, 12)$ pode ser escrita como uma combinação linear de 2^n, $n2^n$ e 3^n, isto é, existem $a, b, c \in \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = a2^n + bn2^n + c3^n,$$

Os valores de a, b e c podem ser determinados pelo sistema

$$\begin{aligned} f(0) &= a2^0 + b.0.2^0 + c.3^0, \\ f(1) &= a2^1 + b.1.2^1 + c.3^1, \\ f(2) &= a2^2 + b.2.2^2 + c.3^2, \end{aligned}$$

Exercicio 119c

ou seja,

$$\begin{aligned}
0 &= 1a + 0b + 1c,\\
1 &= 2a + 2b + 3c,\\
3 &= 4a + 8b + 9c,
\end{aligned}$$

Exercicio 119c

ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= 1a + 0b + 1c, \\ 1 &= 2a + 2b + 3c, \\ 3 &= 4a + 8b + 9c, \end{aligned}$$

e portanto,

$$a = 1, b = 1, c = -1.$$

Exercicio 119c

ou seja,

$$0 = 1a + 0b + 1c,$$
$$1 = 2a + 2b + 3c,$$
$$3 = 4a + 8b + 9c,$$

e portanto,

$$a = 1, b = 1, c = -1.$$

E portanto,

$$f(n) = 2^n + n2^n - 3^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$