

# Matemática Discreta

## Unidade 32: Recorrências Lineares não Homogêneas (1)

Renato Carmo  
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

# Recorrência Linear não Homogênea

## Recorrência Linear não Homogênea

$$f(n) = a_1f(n-1) + a_2f(n-2) + \dots + a_kf(n-k) + g(n), \text{ para todo } n \geq k$$

## Recorrência Linear não Homogênea

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \dots + a_k f(n-k) + g(n), \text{ para todo } n \geq k$$

$$a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$$

## Recorrência Linear não Homogênea

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \dots + a_k f(n-k) + g(n), \text{ para todo } n \geq k$$

$$a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$$

$$g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$$

## Teorema 37

## Teorema 37

$$f(n) = a_1f(n-1) + a_2f(n-2) + \dots + a_kf(n-k) + g(n), \text{ para todo } n \geq k$$

## Teorema 37

$$f(n) = a_1f(n-1) + a_2f(n-2) + \dots + a_kf(n-k) + g(n), \text{ para todo } n \geq k$$

$g(n)$  satisfaz uma RLH



## Teorema 37

$$f(n) = a_1f(n-1) + a_2f(n-2) + \dots + a_kf(n-k) + g(n), \text{ para todo } n \geq k$$

$g(n)$  satisfaz uma RLH cujo PC é  $G$

## Teorema 37

$$f(n) = a_1f(n-1) + a_2f(n-2) + \dots + a_kf(n-k) + g(n), \text{ para todo } n \geq k$$

$g(n)$  satisfaz uma RLH cujo PC é  $G$

$f(n)$  satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G(X^k - a_1X^{k-1} - \dots - a_{k-2}X^2 - a_{k-1}X - a_k)$$



$$g(n) = cn^k r^n$$

$g(n) = cn^k r^n$  satisfaz uma RLH cujo PC é  $(X - r)^{k+1}$



## Corolário 39

$f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  satisfazem RLHs cujos PCs são  $F$  e  $G$

## Corolário 39

$f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  satisfazem RLHs cujos PCs são  $F$  e  $G$

$f + g$  satisfaz uma RLH cujo PC é  $FG$



## Corolário 39

$f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  satisfazem RLHs cujos PCs são  $F$  e  $G$

$f + g$  satisfaz uma RLH cujo PC é  $FG$

Demonstração.

$f$  satisfaz uma RLH cujo PC é  $F$

## Corolário 39

$f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  satisfazem RLHs cujos PCs são  $F$  e  $G$

$f + g$  satisfaz uma RLH cujo PC é  $FG$

Demonstração.

$f$  satisfaz uma RLH cujo PC é  $F = X^k - a_1X^{k-1} - \dots - a_k$

$f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  satisfazem RLHs cujos PCs são  $F$  e  $G$

$f + g$  satisfaz uma RLH cujo PC é  $FG$

Demonstração.

$f$  satisfaz uma RLH cujo PC é  $F = X^k - a_1X^{k-1} - \dots - a_k$   
 $f(n) = a_1f(n-1) + \dots + a_kf(n-k)$ , para todo  $n \geq k$

$f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  satisfazem RLHs cujos PCs são  $F$  e  $G$

$f + g$  satisfaz uma RLH cujo PC é  $FG$

Demonstração.

$f$  satisfaz uma RLH cujo PC é  $F = X^k - a_1X^{k-1} - \dots - a_k$

$f(n) = a_1f(n-1) + \dots + a_kf(n-k)$ , para todo  $n \geq k$

$(f + g)(n)$

$f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  satisfazem RLHs cujos PCs são  $F$  e  $G$

$f + g$  satisfaz uma RLH cujo PC é  $FG$

Demonstração.

$f$  satisfaz uma RLH cujo PC é  $F = X^k - a_1X^{k-1} - \dots - a_k$

$f(n) = a_1f(n-1) + \dots + a_kf(n-k)$ , para todo  $n \geq k$

$(f + g)(n) = f(n) + g(n)$

$f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  satisfazem RLHs cujos PCs são  $F$  e  $G$

$f + g$  satisfaz uma RLH cujo PC é  $FG$

Demonstração.

$f$  satisfaz uma RLH cujo PC é  $F = X^k - a_1X^{k-1} - \dots - a_k$

$f(n) = a_1f(n-1) + \dots + a_kf(n-k)$ , para todo  $n \geq k$

$(f + g)(n) = f(n) + g(n) = a_1f(n-1) + \dots + a_kf(n-k) + g(n)$

$f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  satisfazem RLHs cujos PCs são  $F$  e  $G$

$f + g$  satisfaz uma RLH cujo PC é  $FG$

Demonstração.

$f$  satisfaz uma RLH cujo PC é  $F = X^k - a_1X^{k-1} - \dots - a_k$

$f(n) = a_1f(n-1) + \dots + a_kf(n-k)$ , para todo  $n \geq k$

$(f + g)(n) = f(n) + g(n) = a_1f(n-1) + \dots + a_kf(n-k) + g(n)$

$g(n)$  satisfaz uma RLH cujo PC é  $G$

## Corolário 39

$f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  satisfazem RLHs cujos PCs são  $F$  e  $G$

$f + g$  satisfaz uma RLH cujo PC é  $FG$

### Demonstração.

$f$  satisfaz uma RLH cujo PC é  $F = X^k - a_1X^{k-1} - \dots - a_k$

$f(n) = a_1f(n-1) + \dots + a_kf(n-k)$ , para todo  $n \geq k$

$(f + g)(n) = f(n) + g(n) = a_1f(n-1) + \dots + a_kf(n-k) + g(n)$

$g(n)$  satisfaz uma RLH cujo PC é  $G$

$f + g$  satisfaz uma RLH cujo PC é  $(X^k - a_1X^{k-1} - \dots - a_k)G$



## Corolário 39

$f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  satisfazem RLHs cujos PCs são  $F$  e  $G$

$f + g$  satisfaz uma RLH cujo PC é  $FG$

Demonstração.

$f$  satisfaz uma RLH cujo PC é  $F = X^k - a_1X^{k-1} - \dots - a_k$

$f(n) = a_1f(n-1) + \dots + a_kf(n-k)$ , para todo  $n \geq k$

$(f + g)(n) = f(n) + g(n) = a_1f(n-1) + \dots + a_kf(n-k) + g(n)$

$g(n)$  satisfaz uma RLH cujo PC é  $G$

$f + g$  satisfaz uma RLH cujo PC é  $(X^k - a_1X^{k-1} - \dots - a_k)G = FG$

## Corolário 39

$f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  satisfazem RLHs cujos PCs são  $F$  e  $G$

$f + g$  satisfaz uma RLH cujo PC é  $FG$

### Demonstração.

$f$  satisfaz uma RLH cujo PC é  $F = X^k - a_1X^{k-1} - \dots - a_k$

$f(n) = a_1f(n-1) + \dots + a_kf(n-k)$ , para todo  $n \geq k$

$(f + g)(n) = f(n) + g(n) = a_1f(n-1) + \dots + a_kf(n-k) + g(n)$

$g(n)$  satisfaz uma RLH cujo PC é  $G$

$f + g$  satisfaz uma RLH cujo PC é  $(X^k - a_1X^{k-1} - \dots - a_k)G = FG$  (T. 37) □