Matemática Discreta

Unidade 33: Recorrências Lineares Não Homogêneas (2)

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Exercício 123b

Resolva as seguintes recorrências.

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ 2f(n-1) + 1, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Exercício 123b

Resolva as seguintes recorrências.

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ 2f(n-1) + 1, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

$f(n)$ satisfaz uma RLnH cujo PC é

$$(X - 2)G,$$

Exercício 123b

Resolva as seguintes recorrências.

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ 2f(n-1) + 1, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

$f(n)$ satisfaz uma RLnH cujo PC é

$$(X - 2)G,$$

onde G é o PC de uma RLH satisfeita por

$$g(n) = 1$$

Exercício 123b

Resolva as seguintes recorrências.

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ 2f(n-1) + 1, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

$f(n)$ satisfaz uma RLnH cujo PC é

$$(X - 2)G,$$

onde G é o PC de uma RLH satisfeita por

$$g(n) = 1 = 1.n^{\color{red}{0}}.{\color{blue}{1}}^n.$$

Exercício 123b

Como g satisfaz a recorrência

$$g(n) = g(n-1),$$

Exercício 123b

Como g satisfaz a recorrência

$$g(n) = g(n-1),$$

então g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G = (X - 1),$$

Exercício 123b

Como g satisfaz a recorrência

$$g(n) = g(n-1),$$

então g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G = (X-1),$$

e daí, f satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X-1)(X-2)$$

Exercício 123b

Como g satisfaz a recorrência

$$g(n) = g(n-1),$$

então g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G = (X-1),$$

e daí, f satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X-1)(X-2)$$

e então

$$f(n) = a1^n + b2^n = a + b2^n$$

Exercício 123b

Como g satisfaz a recorrência

$$g(n) = g(n-1),$$

então g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G = (X-1),$$

e daí, f satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X-1)(X-2)$$

e então

$$f(n) = a1^n + b2^n = a + b2^n$$

onde a, e b são dados por

$$\begin{aligned} f(0) &= a + b2^0, \\ f(1) &= a + b2^1. \end{aligned}$$

Exercício 123b

Ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= a + b, \\ 2f(0) + 1 &= a + 2b, \end{aligned}$$

Exercício 123b

Ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= a + b, \\ 2f(0) + 1 &= a + 2b, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} a &= -b, \\ 1 &= -b + 2b = b, \end{aligned}$$

Exercício 123b

Ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= a + b, \\ 2f(0) + 1 &= a + 2b, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} a &= -b, \\ 1 &= -b + 2b = b, \end{aligned}$$

e portanto

$$a = -1, b = 1.$$

Exercício 123b

Ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= a + b, \\ 2f(0) + 1 &= a + 2b, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} a &= -b, \\ 1 &= -b + 2b = b, \end{aligned}$$

e portanto

$$a = {\color{red}-1}, b = {\color{red}1}.$$

e portanto,

$$f(n) = a + b2^n = -1 + 1.2^n =$$

Exercício 123b

Ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= a + b, \\ 2f(0) + 1 &= a + 2b, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} a &= -b, \\ 1 &= -b + 2b = b, \end{aligned}$$

e portanto

$$a = -1, b = 1.$$

e portanto,

$$f(n) = a + b2^n = -1 + 1.2^n = 2^n - 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$