Matemática Discreta

Unidade 35: Recorrências Lineares Não Homogêneas (4)

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Exercicio 123k

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ f(n-1) + f(n-2) + 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Exercicio 123k

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ f(n-1) + f(n-2) + 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Usando a notação do Teorema 37 temos

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= 1, \\ g(n) &= 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Exercicio 123k

Como

$$g(n) = 1n^{0}1^{n},$$

Exercicio 123k

Como

$$g(n) = 1n^{0}1^{n},$$

então g satisfaz uma RLH cujo polinômio característico é

$$G = (X - 1)^{0+1} = X - 1$$

Exercicio 123k

Como

$$g(n) = 1n^{0}1^{n},$$

então g satisfaz uma RLH cujo polinômio característico é

$$G = (X - 1)^{0+1} = X - 1$$

Pelo Teorema 37 temos que f pertence ao espaço vetorial cujo polinômio característico é

$$G(X^2 - X - 1) = (X - 1)(X^2 - X - 1),$$

Exercicio 123k

Como

$$g(n) = 1n^{0}1^{n},$$

então g satisfaz uma RLH cujo polinômio característico é

$$G = (X - 1)^{0+1} = X - 1$$

Pelo Teorema 37 temos que f pertence ao espaço vetorial cujo polinômio característico é

$$G(X^2 - X - 1) = (X - 1)(X^2 - X - 1),$$

e cujas raízes são

$$\begin{aligned} r_1 &= 1, \\ r_2 &= \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \\ r_3 &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Exercicio 123k

Pelo Corolário 36, temos

$$\begin{aligned}
f(n) &= ar_1^n + br_2^n + cr_3^n \\
&= a1^n + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + c\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \\
&= a + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + c\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

Exercicio 123k

onde $\{a, b, c\}$ é a solução do sistema

$$\begin{aligned}
f(0) &= a + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 + c\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0, \\
f(1) &= a + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 + c\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1, \\
f(2) &= a + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2,
\end{aligned}$$

Exercicio 123k

$$
\begin{aligned}
0 &= a + b + c, \\
1 &= a + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + c\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \\
f(0) + f(1) + 1 &= a + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2,
\end{aligned}
$$

Exercicio 123k

$$
\begin{aligned}
0 &= a+b+c, \\
1 &= a+b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)+c\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \\
f(0)+f(1)+1 &= a+b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2+c\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
0 &= a+b+c, \\
1 &= a+b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)+c\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \\
2 &= a+b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2+c\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2,
\end{aligned}
$$

Exercicio 123k

cuja solução é

$$\begin{aligned} a &= -1, \\ b &= \frac{5-3\sqrt{5}}{10}, \\ c &= \frac{5+3\sqrt{5}}{10}, \end{aligned}$$

Exercicio 123k

cuja solução é

$$
\begin{aligned}
a &= -1, \\
b &= \frac{5-3\sqrt{5}}{10}, \\
c &= \frac{5+3\sqrt{5}}{10},
\end{aligned}
$$

e portanto,

$$f(n) = \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.