Matemática Discreta

Unidade 36: Recorrências Lineares Não Homogêneas (5)

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Exercício 123d

Resolva as seguintes recorrências.

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 1, \\ 2f(n-1) + n, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

Exercício 123d

Resolva as seguintes recorrências.

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 1, \\ 2f(n-1) + n, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

Usando a notação do Teorema 37 temos

$$\begin{aligned} a_1 &= 2, \\ g(n) &= n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Exercício 123d

Como

$$g(n) = 1n^1 1^n,$$

temos diretamente do Corolário 38 que g satisfaz uma RLH cujo PC é

Exercício 123d

Como

$$g(n) = 1n^1 1^n,$$

temos diretamente do Corolário 38 que g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G = (X - 1)^{1+1} = (X - 1)^2,$$

Exercício 123d

Como

$$g(n) = 1n^1 1^n,$$

temos diretamente do Corolário 38 que g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G = (X-1)^{1+1} = (X-1)^2,$$

e daí, pelo Teorema 37 temos que f pertence ao espaço vetorial cujo polinômio característico é

$$G(X-2) = (X-1)^2(X-2),$$

Exercício 123d

Como

$$g(n) = 1n^1 1^n,$$

temos diretamente do Corolário 38 que g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G = (X-1)^{1+1} = (X-1)^2,$$

e daí, pelo Teorema 37 temos que f pertence ao espaço vetorial cujo polinômio característico é

$$G(X-2) = (X-1)^2(X-2),$$

e daí, pelo Corolário 36, temos

$$f(n) = c_{1,0}1^n + c_{1,1}n1^n + c_{2,0}2^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

Exercício 123d)

ou seja,

$$f(n) = c_{1,0} + c_{1,1}n + c_{2,0}2^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

Exercício 123d)

ou seja,

$$f(n) = c_{1,0} + c_{1,1}n + c_{2,0}2^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde $\{c_{1,0}, c_{1,1}, c_{2,0}\}$ é a solução do sistema

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{1,0} + 0c_{1,1} + c_{2,0}2^0, \\ f(1) &= c_{1,0} + 1c_{1,1} + c_{2,0}2^1, \\ f(2) &= c_{1,0} + 2c_{1,1} + c_{2,0}2^2, \end{aligned}$$

Exercício 123d)

ou seja,

$$f(n) = c_{1,0} + c_{1,1}n + c_{2,0}2^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde $\{c_{1,0}, c_{1,1}, c_{2,0}\}$ é a solução do sistema

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{1,0} + 0c_{1,1} + c_{2,0}2^0, \\ f(1) &= c_{1,0} + 1c_{1,1} + c_{2,0}2^1, \\ f(2) &= c_{1,0} + 2c_{1,1} + c_{2,0}2^2, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{1,0} + c_{2,0}, \\ 2f(0) + 1 &= c_{1,0} + c_{1,1} + 2c_{2,0}, \\ 2f(1) + 2 &= c_{1,0} + 2c_{1,1} + 4c_{2,0}, \end{aligned}$$

Exercício 123d)

ou seja,

$$
\begin{aligned}
0 &= c_{1,0} + c_{2,0}, \\
1 &= c_{1,0} + c_{1,1} + 2c_{2,0}, \\
4 &= c_{1,0} + 2c_{1,1} + 4c_{2,0},
\end{aligned}
$$

Exercício 123d)

ou seja,

$$
\begin{aligned}
0 &= c_{1,0} + c_{2,0}, \\
1 &= c_{1,0} + c_{1,1} + 2c_{2,0}, \\
4 &= c_{1,0} + 2c_{1,1} + 4c_{2,0},
\end{aligned}
$$

cuja solução é

$$c_{1,0} = -2, c_{1,1} = -1, c_{2,0} = 2,$$

Exercício 123d)

ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= c_{1,0} + c_{2,0}, \\ 1 &= c_{1,0} + c_{1,1} + 2c_{2,0}, \\ 4 &= c_{1,0} + 2c_{1,1} + 4c_{2,0}, \end{aligned}$$

cuja solução é

$$c_{1,0} = -2, c_{1,1} = -1, c_{2,0} = 2,$$

e portanto,

$$f(n) = c_{1,0} + c_{1,1}n + c_{2,0}2^n = 2.2^n - n - 2 =$$

Exercício 123d)

ou seja,

$$
\begin{aligned}
0 &= c_{1,0} + c_{2,0}, \\
1 &= c_{1,0} + c_{1,1} + 2c_{2,0}, \\
4 &= c_{1,0} + 2c_{1,1} + 4c_{2,0},
\end{aligned}
$$

cuja solução é

$$c_{1,0} = -2, c_{1,1} = -1, c_{2,0} = 2,$$

e portanto,

$$f(n) = c_{1,0} + c_{1,1}n + c_{2,0}2^n = 2.2^n - n - 2 = 2^{n+1} - n - 2, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$