Matemática Discreta

Unidade 38: Somatórios (2)

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Exercicio 129)

Dê uma expressão livre de somatórios para $\sum_{i=0}^{n} i$.

Exercicio 129)

Dê uma expressão livre de somatórios para $\sum_{i=0}^{n} i$.

Como

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} i = \sum_{i=0}^{n} g(i) =$$

Exercicio 129)

Dê uma expressão livre de somatórios para $\sum_{i=0}^{n} i$.

Como

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} i = \sum_{i=0}^{n} g(i) = \sum_{i=0}^{n-1} g(i) + n =$$

Exercicio 129)

Dê uma expressão livre de somatórios para $\sum_{i=0}^{n} i$.

Como

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} i = \sum_{i=0}^{n} g(i) = \sum_{i=0}^{n-1} g(i) + n = s(n-1) + n,$$

onde

$$g(n) = n,$$

Exercicio 129)

Dê uma expressão livre de somatórios para $\sum_{i=0}^{n} i$.

Como

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} i = \sum_{i=0}^{n} g(i) = \sum_{i=0}^{n-1} g(i) + n = s(n-1) + n,$$

onde

$$g(n) = n,$$

e

$$g(n) = 1n^{1}1^{n},$$

Exercicio 129)

Dê uma expressão livre de somatórios para $\sum_{i=0}^{n} i$.

Como

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} i = \sum_{i=0}^{n} g(i) = \sum_{i=0}^{n-1} g(i) + n = s(n-1) + n,$$

onde

$$g(n) = n,$$

e

$$g(n) = 1n^{1}1^{n},$$

temos do Corolário 38 que a função g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G = (X - 1)^{1+1} = (X - 1)^2.$$

Exercicio 129)

E daí, pelo Corolário 40 temos que a função s satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X-1)G = (X-1)(X-1)^2 = (X-1)^3.$$

Exercicio 129)

E daí, pelo Corolário 40 temos que a função s satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X-1)G = (X-1)(X-1)^2 = (X-1)^3.$$

Pelo Corolário 36, temos

$$s(n) = a1^n + bn^1 1^n + cn^2 1^n = a + bn + cn^2,$$

Exercicio 129)

E daí, pelo Corolário 40 temos que a função s satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X-1)G = (X-1)(X-1)^2 = (X-1)^3.$$

Pelo Corolário 36, temos

$$s(n) = a1^n + bn^1 1^n + cn^2 1^n = a + bn + cn^2,$$

onde (a, b, c) é a solução do sistema

$$\begin{aligned} s(0) &= a + b0^1 + c0^2, \\ s(1) &= a + b1^1 + c1^2, \\ s(2) &= a + b2^1 + c2^2. \end{aligned}$$

Exercicio 129)

Isto é,

$$\begin{aligned} 0 &= a, \\ 1 &= a + b + c, \\ 3 &= a + 2b + 4c, \end{aligned}$$

Exercicio 129)

Isto é,

$$\begin{aligned} 0 &= a, \\ 1 &= a + b + c, \\ 3 &= a + 2b + 4c, \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} 1 &= a + c, \\ 3 &= 2a + 4c, \end{aligned}$$

Exercicio 129)

Isto é,

$$
\begin{aligned}
0 &= a, \\
1 &= a + b + c, \\
3 &= a + 2b + 4c,
\end{aligned}
$$

e portanto,

$$
\begin{aligned}
1 &= a + c, \\
3 &= 2a + 4c,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$a = 0, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{2},$$

Exercicio 129)

Isto é,

$$\begin{aligned} 0 &= a, \\ 1 &= a + b + c, \\ 3 &= a + 2b + 4c, \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} 1 &= a + c, \\ 3 &= 2a + 4c, \end{aligned}$$

isto é,

$$a = 0, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{2},$$

e portanto,

$$s(n) = a + bn + cn^2 =$$

Exercicio 129)

Isto é,

$$\begin{aligned} 0 &= a, \\ 1 &= a + b + c, \\ 3 &= a + 2b + 4c, \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} 1 &= a + c, \\ 3 &= 2a + 4c, \end{aligned}$$

isto é,

$$a = 0, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{2},$$

e portanto,

$$s(n) = a + bn + cn^2 = 0 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 =$$

Exercicio 129)

Isto é,

$$\begin{aligned} 0 &= a, \\ 1 &= a + b + c, \\ 3 &= a + 2b + 4c, \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} 1 &= a + c, \\ 3 &= 2a + 4c, \end{aligned}$$

isto é,

$$a = 0, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{2},$$

e portanto,

$$s(n) = a + bn + cn^2 = 0 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$