Matemática Discreta

Unidade 40: Somatórios (4)

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Exercicio 128

Uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ é uma **progressão aritmética**[1] se existe $r \in \mathbb{C}$ tal que

$$f(i+1) - f(i) = r \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, a soma dos n termos iniciais de uma progressão aritmética é dada por

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i).$$

a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência linear não homogênea.
b) Resolva esta recorrência, obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão aritmética.
c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

[1] cfr. Exercício 106

Exercicio 128a

a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência linear não homogênea.

Exercicio 128a

a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência linear não homogênea.

Como

$$f(n+1) = f(n) + r, \text{ para todo } n \geq 0,$$

Exercicio 128a

a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência linear não homogênea.

Como

$$f(n+1) = f(n) + r, \text{ para todo } n \geq 0,$$

pode-se fazer a troca de variável $n+1 = t$, e então temos $n = t-1$ e

$$f(t) = f(t-1) + r, \text{ para todo } t \geq 1.$$

Exercicio 128a

a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência linear não homogênea.

Como

$$f(n+1) = f(n) + r, \text{ para todo } n \geq 0,$$

pode-se fazer a troca de variável $n + 1 = t$, e então temos $n = t - 1$ e

$$f(t) = f(t-1) + r, \text{ para todo } t \geq 1.$$

Assim podemos expressar f como uma RLnH da seguinte forma

$$f(n) = f(n-1) + r, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Exercicio 128b

b) Resolva esta recorrência ($f(n) = f(n-1) + r, \text{ para todo } n \geq 1$), obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão aritmética.

Usando a notação do Teorema 37 temos

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ g(n) &= r, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Exercicio 128b

b) Resolva esta recorrência ($f(n) = f(n-1) + r, \text{ para todo } n \geq 1$), obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão aritmética.

Usando a notação do Teorema 37 temos

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ g(n) &= r, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Como

$$g(n) = rn^0 1^n,$$

Exercicio 128b

b) Resolva esta recorrência ($f(n) = f(n-1) + r$, para todo $n \geq 1$), obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão aritmética.

Usando a notação do Teorema 37 temos

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ g(n) &= r, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Como

$$g(n) = rn^{0}1^{n},$$

temos diretamente do Corolário 38 que g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G = (X - 1)^{1+0} = (X - 1),$$

Exercicio 128b

b) Resolva esta recorrência ($f(n) = f(n-1) + r,$ para todo $n \geq 1$), obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão aritmética.

Usando a notação do Teorema 37 temos

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ g(n) &= r, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Como

$$g(n) = rn^0 1^n,$$

temos diretamente do Corolário 38 que g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G = (X - 1)^{1+0} = (X - 1),$$

e daí, pelo Teorema 37 temos que f pertence ao espaço vetorial cujo polinômio característico é

$$G(X - 1) = (X - 1)^2,$$

Exercicio 128b

E daí, pelo Corolário 36, temos

$$f(n) = an^0 1^n + bn^1 1^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

Exercicio 128b

E daí, pelo Corolário 36, temos

$$f(n) = an^0 1^n + bn^1 1^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$f(n) = a + bn, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

Exercicio 128b

E daí, pelo Corolário 36, temos

$$f(n) = an^0 1^n + bn^1 1^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$f(n) = a + bn, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde $\{a, b\}$ é a solução do sistema

$$\begin{aligned} f(0) &= a + 0b, \\ f(1) &= a + 1b, \end{aligned}$$

Exercicio 128b

E daí, pelo Corolário 36, temos

$$f(n) = an^0 1^n + bn^1 1^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$f(n) = a + bn, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde $\{a, b\}$ é a solução do sistema

$$\begin{aligned} f(0) &= a + 0b, \\ f(1) &= a + 1b, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} {\color{red}f(0)} &= a, \\ {\color{red}f(0) + r} &= a + b, \end{aligned}$$

Exercicio 128b

$$\begin{aligned} f(0) &= a, \\ f(0) + r &= a + b, \end{aligned}$$

ou seja,

$$b = f(0) + r - a$$

Exercicio 128b

$$\begin{aligned} f(0) &= a, \\ f(0) + r &= a + b, \end{aligned}$$

ou seja,

$$b = f(0) + r - a = f(0) + r - f(0)$$

Exercicio 128b

$$\begin{aligned} \color{red}{f(0)} &= a, \\ \color{red}{f(0) + r} &= a + b, \end{aligned}$$

ou seja,

$$b = f(0) + r - a = f(0) + r - f(0) = r.$$

Exercicio 128b

$$\begin{aligned} f(0) &= a, \\ f(0) + r &= a + b, \end{aligned}$$

ou seja,

$$b = f(0) + r - a = f(0) + r - f(0) = r.$$

Portanto,

$$f(n) = a + bn$$

Exercicio 128b

$$\begin{aligned} f(0) &= a, \\ f(0) + r &= a + b, \end{aligned}$$

ou seja,

$$b = f(0) + r - a = f(0) + r - f(0) = r.$$

Portanto,

$$f(n) = a + bn \quad = \quad f(0) + rn, \ \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

Exercicio 128b

$$\begin{aligned} f(0) &= a, \\ f(0) + r &= a + b, \end{aligned}$$

ou seja,

$$b = f(0) + r - a = f(0) + r - f(0) = r.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f(n) = a + bn &= f(0) + rn, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \\ &= a_1 + r(n' - 1), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Exercicio 128c

c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

Exercicio 128c

c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)$$

e $f(n)$ $(= f(0) + rn)$ satisfaz uma RLnH cujo PC é $(X-1)^2$

Exercicio 128c

c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)$$

e $f(n)$ ($= f(0) + rn$) satisfaz uma RLnH cujo PC é $(X-1)^2$, então (C. 40), a função $s(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X-1)(X-1)^2 = (X-1)^3.$$

Exercicio 128c

c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)$$

e $f(n)$ $(= f(0) + rn)$ satisfaz uma RLnH cujo PC é $(X-1)^2$, então (C. 40), a função $s(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X-1)(X-1)^2 = (X-1)^3.$$

e daí (C. 36),

$$s(n) = a1^n + bn^1 1^n + cn^2 1^n$$

Exercicio 128c

c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)$$

e $f(n)$ $(= f(0) + rn)$ satisfaz uma RLnH cujo PC é $(X-1)^2$, então (C. 40), a função $s(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X-1)(X-1)^2 = (X-1)^3.$$

e daí (C. 36),

$$s(n) = a1^n + bn^1 1^n + cn^2 1^n = a + bn + cn^2.$$

Exercicio 128c

Os coeficientes a, b e c são dados por

$$\begin{aligned}
s(0) &= a + b0 + c0^2, \\
s(1) &= a + b1 + c1^2, \\
s(2) &= a + b2 + c2^2,
\end{aligned}$$

Exercicio 128c

Os coeficientes a, b e c são dados por

$$\begin{aligned} s(0) &= a + b0 + c0^2, \\ s(1) &= a + b1 + c1^2, \\ s(2) &= a + b2 + c2^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$0 = a,$$

e

$$\begin{aligned} s(1) = &\quad f(0) &= b + c, \\ s(2) = &\quad f(0) + f(0) + r &= 2b + 4c, \end{aligned}$$

Exercicio 128c

Os coeficientes a, b e c são dados por

$$\begin{aligned} s(0) &= a + b0 + c0^2, \\ s(1) &= a + b1 + c1^2, \\ s(2) &= a + b2 + c2^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\color{red}{0} = a,$$

e

$$\begin{aligned} s(1) = & \quad \color{red}{f(0)} & = b + c, \\ s(2) = & \quad f(0) + \color{red}{f(0) + r} & = 2b + 4c, \end{aligned}$$

ou seja,

$$c = f(0) - b$$

Exercicio 128c

e

$$2f(0) + r = 2b + 4(f(0) - b) =$$

Exercicio 128c

e

$$2f(0) + r = 2b + 4(f(0) - b) = -2b + 4f(0),$$

Exercicio 128c

e

$$2f(0) + r = 2b + 4(f(0) - b) = -2b + 4f(0),$$

ou seja,

$$b = (2f(0) - r)/2$$

e

$$c = f(0) - b$$

Exercicio 128c

e

$$2f(0) + r = 2b + 4(f(0) - b) = -2b + 4f(0),$$

ou seja,

$$b = (2f(0) - r)/2$$

e

$$c = f(0) - b = f(0) - (2f(0) - r)/2$$

Exercicio 128c

e

$$2f(0) + r = 2b + 4(f(0) - b) = -2b + 4f(0),$$

ou seja,

$$b = (2f(0) - r)/2$$

e

$$c = f(0) - b = f(0) - (2f(0) - r)/2 = r/2$$

Exercicio 128c

e

$$2f(0) + r = 2b + 4(f(0) - b) = -2b + 4f(0),$$

ou seja,

$$b = (2f(0) - r)/2$$

e

$$c = f(0) - b = f(0) - (2f(0) - r)/2 = r/2$$

Portanto

$$s(n) = a + bn + cn^2$$

Exercicio 128c

e

$$2f(0) + r = 2b + 4(f(0) - b) = -2b + 4f(0),$$

ou seja,

$$b = (2f(0) - r)/2$$

e

$$c = f(0) - b = f(0) - (2f(0) - r)/2 = r/2$$

Portanto

$$s(n) = a + bn + cn^2 = 0 + \frac{2(f(0) - r)n}{2} + \frac{rn^2}{2}$$

Exercicio 128c

e

$$2f(0) + r = 2b + 4(f(0) - b) = \ -2b + 4f(0),$$

ou seja,

$$b = (2f(0) - r)/2$$

e

$$c = f(0) - b = f(0) - (2f(0) - r)/2 = r/2$$

Portanto

$$s(n) = a + bn + cn^2 = 0 + \frac{2(f(0) - r)n}{2} + \frac{rn^2}{2} = f(0)n + \frac{r(n^2 - n)}{2}$$

Exercicio 128c

e

$$2f(0) + r = 2b + 4(f(0) - b) = -2b + 4f(0),$$

ou seja,

$$b = (2f(0) - r)/2$$

e

$$c = f(0) - b = f(0) - (2f(0) - r)/2 = r/2$$

Portanto

$$s(n) = a + bn + cn^2 = 0 + \frac{2(f(0) - r)n}{2} + \frac{rn^2}{2} = f(0)n + \frac{r(n^2 - n)}{2}$$
$$= f(0)n + \frac{n(n-1)}{2}r.$$

Exercicio 128c

Finalmente, observe que

$$s(n) = f(0)n + \frac{n(n-1)}{2}r, \text{ para todo } n > 0$$

Exercicio 128c

Finalmente, observe que

$$s(n) = f(0)n + \frac{n(n-1)}{2}r, \text{ para todo } n > 0,$$

e

$$s(n) = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Exercicio 128c

Finalmente, observe que

$$s(n) = f(0)n + \frac{n(n-1)}{2}r, \text{ para todo } n > 0,$$

e

$$s(n) = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(a_1 + a_1 + (n-1)r)n}{2}$$

Exercicio 128c

Finalmente, observe que

$$s(n) = f(0)n + \frac{n(n-1)}{2}r, \text{ para todo } n > 0,$$

e

$$\begin{aligned} s(n) &= \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(a_1 + a_1 + (n-1)r)n}{2}, \\ &= \frac{(2a_1 + (n-1)r)n}{2} \end{aligned}$$

Exercicio 128c

Finalmente, observe que

$$s(n) = f(0)n + \frac{n(n-1)}{2}r, \text{ para todo } n > 0,$$

e

$$\begin{aligned} s(n) &= \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(a_1 + a_1 + (n-1)r)n}{2}, \\ &= \frac{(2a_1 + (n-1)r)n}{2} = \frac{2a_1 n}{2} + \frac{(n-1)nr}{2} \end{aligned}$$

Exercicio 128c

Finalmente, observe que

$$s(n) = f(0)n + \frac{n(n-1)}{2}r, \text{ para todo } n > 0,$$

e

$$\begin{aligned} s(n) &= \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(a_1 + a_1 + (n-1)r)n}{2}, \\ &= \frac{(2a_1 + (n-1)r)n}{2} = \frac{2a_1 n}{2} + \frac{(n-1)nr}{2}, \\ &= a_1 n + \frac{n(n-1)}{2}r. \end{aligned}$$