

Matemática Discreta

Unidade 41: Somatórios (5)

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Exercício 130

Dê uma expressão¹ livre de somatórios para $\sum_{i=0}^n i2^i$.

¹cfr. Exercício 47

Exercício 130

Dê uma expressão¹ livre de somatórios para $\sum_{i=0}^n i2^i$.

Fazendo

$$s(n) = \sum_{i=0}^n g(i)$$

¹cfr. Exercício 47

Exercício 130

Dê uma expressão¹ livre de somatórios para $\sum_{i=0}^n i2^i$.

Fazendo

$$s(n) = \sum_{i=0}^n g(i) = \sum_{i=0}^{n-1} g(i) + n2^n$$

¹cfr. Exercício 47

Exercício 130

Dê uma expressão¹ livre de somatórios para $\sum_{i=0}^n i2^i$.

Fazendo

$$s(n) = \sum_{i=0}^n g(i) = \sum_{i=0}^{n-1} g(i) + n2^n = s(n-1) + g(n),$$

¹cfr. Exercício 47

Exercício 130

Dê uma expressão¹ livre de somatórios para $\sum_{i=0}^n i2^i$.

Fazendo

$$s(n) = \sum_{i=0}^n g(i) = \sum_{i=0}^{n-1} g(i) + n2^n = s(n-1) + g(n),$$

onde

$$g(n) = n2^n,$$

temos

$$g(n) = 1n^1 2^n,$$

¹cfr. Exercício 47

Exercício 130

Dê uma expressão¹ livre de somatórios para $\sum_{i=0}^n i2^i$.

Fazendo

$$s(n) = \sum_{i=0}^n g(i) = \sum_{i=0}^{n-1} g(i) + n2^n = s(n-1) + g(n),$$

onde

$$g(n) = n2^n,$$

temos

$$g(n) = 1n^1 2^n,$$

e daí, do Corolário 38 temos que a função g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G = (X - 2)^{1+1} = (X - 2)^2.$$

¹cfr. Exercício 47

Exercício 130

E daí, pelo Corolário 40 temos que a função s satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X - 1)G = (X - 1)(X - 2)^2.$$

Exercício 130

E daí, pelo Corolário 40 temos que a função s satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X - 1)G = (X - 1)(X - 2)^2.$$

Pelo Corolário 36, temos

$$s(n) = an^0 1^n + bn^0 2^n + cn^1 2^n$$

Exercício 130

E daí, pelo Corolário 40 temos que a função s satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X - 1)G = (X - 1)(X - 2)^2.$$

Pelo Corolário 36, temos

$$s(n) = an^0 1^n + bn^0 2^n + cn^1 2^n = a + b2^n + cn2^n$$

Exercício 130

E daí, pelo Corolário 40 temos que a função s satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X - 1)G = (X - 1)(X - 2)^2.$$

Pelo Corolário 36, temos

$$s(n) = an^0 1^n + bn^0 2^n + cn^1 2^n = a + b2^n + cn2^n$$

onde (a, b, c) é a solução do sistema

$$s(0) = a + b \cdot 2^0 + c \cdot 0 \cdot 2^0,$$

$$s(1) = a + b \cdot 2^1 + c \cdot 1 \cdot 2^1,$$

$$s(2) = a + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 \cdot 2^2,$$

Exercício 130

E daí, pelo Corolário 40 temos que a função s satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X - 1)G = (X - 1)(X - 2)^2.$$

Pelo Corolário 36, temos

$$s(n) = an^01^n + bn^02^n + cn^12^n = a + b2^n + cn2^n$$

onde (a, b, c) é a solução do sistema

$$s(0) = a + b \cdot 2^0 + c \cdot 0 \cdot 2^0,$$

$$s(1) = a + b \cdot 2^1 + c \cdot 1 \cdot 2^1,$$

$$s(2) = a + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 \cdot 2^2,$$

isto é,

$$0 = a + b(1) + c(0)1,$$

$$0 + 12^1 = a + b(2) + c(1)2,$$

$$0 + 12^1 + 22^2 = a + b(4) + c(2)4.$$

Exercício 130

Ou seja,

$$0 = a + b,$$

$$2 = a + 2b + 2c,$$

$$10 = a + 4b + 8c,$$

Exercício 130

Ou seja,

$$0 = a + b,$$

$$2 = a + 2b + 2c,$$

$$10 = a + 4b + 8c,$$

cuja solução é

$$a = 2, b = -2, c = 2.$$

Exercício 130

Ou seja,

$$\begin{aligned}0 &= a + b, \\2 &= a + 2b + 2c, \\10 &= a + 4b + 8c,\end{aligned}$$

cuja solução é

$$a = 2, b = -2, c = 2.$$

e portanto,

$$s(n) = a + b2^n + cn2^n$$

Exercício 130

Ou seja,

$$\begin{aligned}0 &= a + b, \\2 &= a + 2b + 2c, \\10 &= a + 4b + 8c,\end{aligned}$$

cuja solução é

$$a = 2, b = -2, c = 2.$$

e portanto,

$$s(n) = a + b2^n + cn2^n = 2 - 2 \times 2^n + 2n2^n,$$

Exercício 130

Ou seja,

$$\begin{aligned}0 &= a + b, \\2 &= a + 2b + 2c, \\10 &= a + 4b + 8c,\end{aligned}$$

cuja solução é

$$a = 2, b = -2, c = 2.$$

e portanto,

$$\begin{aligned}s(n) &= a + b2^n + cn2^n = 2 - 2 \times 2^n + 2n2^n, \\&= 2^{n+1}(n - 1) + 2\end{aligned}$$

Exercício 130

Ou seja,

$$\begin{aligned}0 &= a + b, \\2 &= a + 2b + 2c, \\10 &= a + 4b + 8c,\end{aligned}$$

cuja solução é

$$a = 2, b = -2, c = 2.$$

e portanto,

$$\begin{aligned}s(n) &= a + b2^n + cn2^n = 2 - 2 \times 2^n + 2n2^n, \\&= 2^{n+1}(n - 1) + 2, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$