Matemática Discreta

Unidade 46: União

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

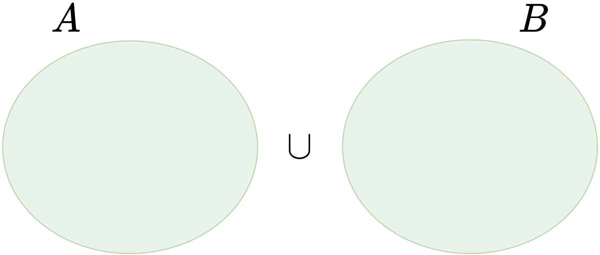
Segundo Período Especial de 2020

Teorema 43

Teorema

Se A e B são conjuntos finitos e disjuntos, então

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$



Teorema 43

Demonstração.

Sejam A e B conjuntos disjuntos.

Vamos provar que $|A \cup B| = |A| + |B|$ provando que

Teorema 43

Demonstração.

Sejam A e B conjuntos disjuntos.

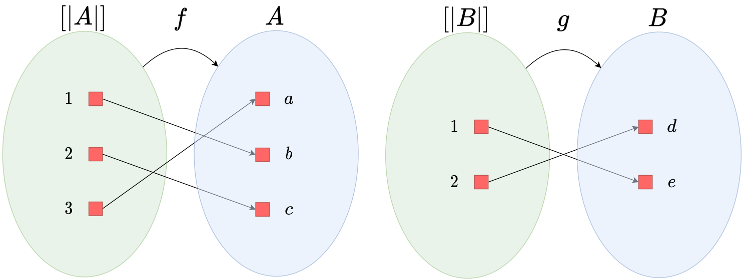
Vamos provar que $|A \cup B| = |A| + |B|$ provando que $A \cup B \sim [|A| + |B|]$.

Teorema 43

Demonstração.

Sejam f e g enumerações de A e B, respectivamente, e seja $h\colon [|A| + |B|] \to A \cup B$ dada por

$$h(k) = \begin{cases} f(k), & \text{se } k \leq |A|, \\ & \end{cases}$$

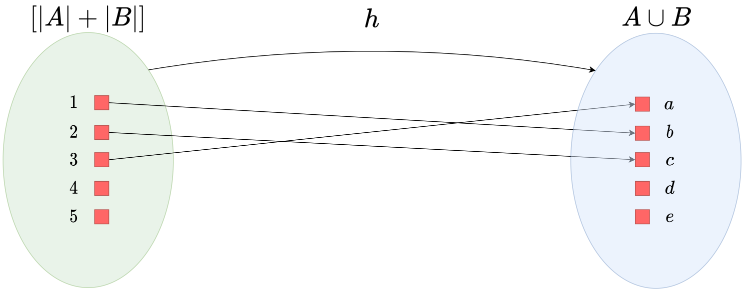


Teorema 43

Demonstração.

Sejam f e g enumerações de A e B, respectivamente, e seja $h\colon [|A| + |B|] \to A \cup B$ dada por

$$h(k) = \begin{cases} f(k), & \text{se } k \leq |A|, \\ g(k - |A|) & \text{se } k > |A|. \end{cases}$$

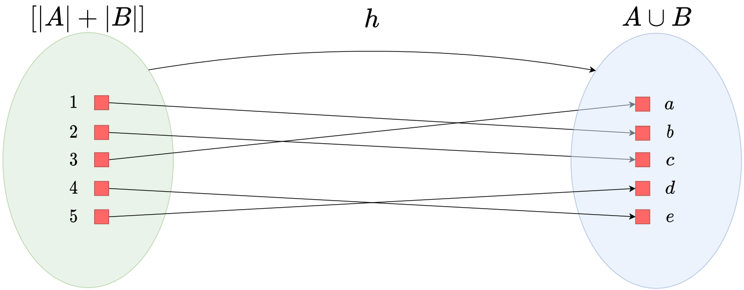


Teorema 43

Demonstração.

Sejam f e g enumerações de A e B, respectivamente, e seja $h\colon [|A| + |B|] \to A \cup B$ dada por

$$h(k) = \begin{cases} f(k), & \text{se } k \leq |A|, \\ g(k - |A|) & \text{se } k > |A|. \end{cases}$$



União

Como a união de conjuntos é uma operação associativa,

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i := A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

União

Como a união de conjuntos é uma operação associativa,

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i := A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

Para $n = 0$, convencionamos

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \emptyset.$$

Corolário 44

Corolário (Princípio Aditivo)

Se $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos dois a dois disjuntos entre si, então,

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

Demonstração.

Exercício 58 $\square$

Corolário 45

Corolário (Limitante da União)

Se $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos, então,

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

Corolário 46

Corolário

Se A é um conjunto finito e $f : A \to B$ é uma função, então

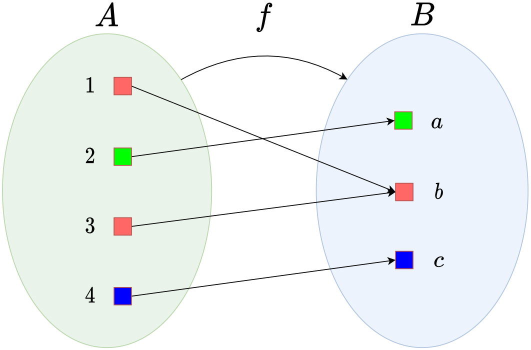
$$|A| = \sum_{b \in f(A)} |f^{-1}(b)|$$

Corolário 46

Demonstração.

Seja A um conjunto finito e seja $f\colon A \to B$ uma função. Como

$$A = \bigcup_{b \in f(A)} f^{-1}(b),$$

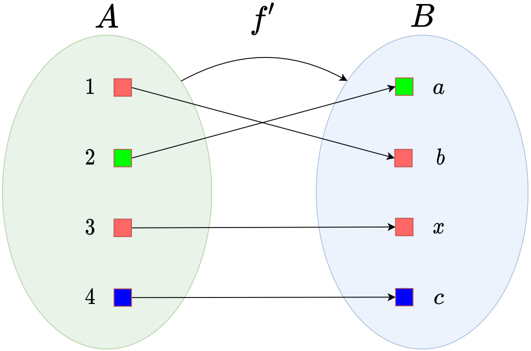


Corolário 46

Demonstração.

então (C.42)

$$|A| = \left| \bigcup_{b \in f(A)} f^{-1}(b) \right|$$



Corolário 46

Demonstração.

e como os conjuntos $f^{-1}(b) \mid b \in B$ são dois a dois disjuntos entre si,

Corolário 46

Demonstração.

e como os conjuntos $f^{-1}(b) \mid b \in B$ são dois a dois disjuntos entre si, então (Corolário 44)

$$|A| = \sum_{b \in f(A)} |f^{-1}(b)|.$$

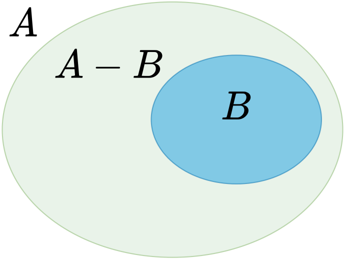
$\square$

Corolário 47

Corolário

Se A é um conjunto finito e $B \subseteq A$, então

$$|A - B| = |A| - |B|.$$



Corolário 47

Demonstração.

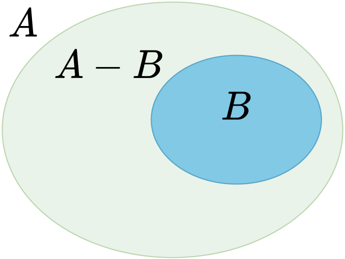
Seja A um conjunto finito e seja $B \subseteq A$. Vamos provar que $|A - B| = |A| - |B|$.

Corolário 47

Demonstração.

Seja A um conjunto finito e seja $B \subseteq A$. Vamos provar que $|A - B| = |A| - |B|$.
Observe que, como $B \subseteq A$, então (Ex. 11)

$$A = (A - B) \cup B,$$

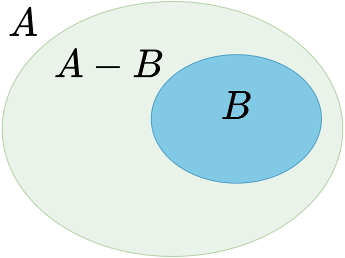


Corolário 47

Demonstração.

de forma que

$$|A| = |(A - B) \cup B|,$$



Corolário 47

Demonstração.

e como $A - B$ e B são disjuntos,

Corolário 47

Demonstração.

e como $A - B$ e B são disjuntos, então (Teorema 43)

$$|(A - B) \cup B| = |A - B| + |B|,$$

Corolário 47

Demonstração.

e como $A - B$ e B são disjuntos, então (Teorema 43)

$$|(A - B) \cup B| = |A - B| + |B|,$$

e portanto,

$$|A| = |A - B| + |B|,$$

Corolário 47

Demonstração.

e como $A - B$ e B são disjuntos, então (Teorema 43)

$$|(A - B) \cup B| = |A - B| + |B|,$$

e portanto,

$$|A| = |A - B| + |B|,$$

ou seja

$$|A - B| = |A| - |B|.$$

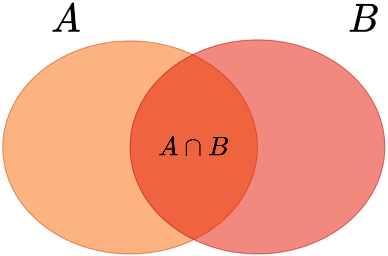
$\square$

Corolário 48

Corolário

Se A e B são conjuntos finitos, então

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$



Corolário 48

Demonstração.

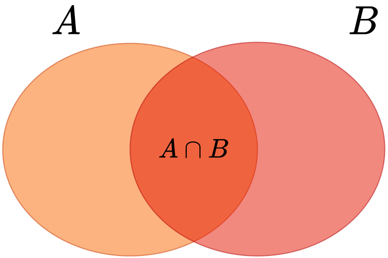
Sejam A e B conjuntos finitos. Vamos provar que $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Corolário 48

Demonstração.

Sejam A e B conjuntos finitos. Vamos provar que $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
Observe que

$$A \cup B = A \cup (B - A \cap B),$$

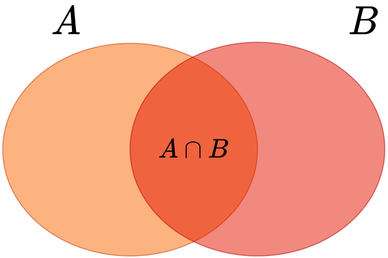


Corolário 48

Demonstração.

Sejam A e B conjuntos finitos. Vamos provar que $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Observe que

$$A \cup B = A \cup (B - A \cap B),$$



e como A e $(B - A \cap B)$ são disjuntos, então (Teorema 43)

Corolário 48

Demonstração.

Como $A \cap B \subseteq B$, temos (Corolário 47) que

$$|B - (A \cap B)| = |B| - |A \cap B|,$$

Corolário 48

Demonstração.

Como $A \cap B \subseteq B$, temos (Corolário 47) que

$$|B - (A \cap B)| = |B| - |A \cap B|,$$

e consequentemente

$$|A \cup B| = |A| + |B - A \cap B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

$\square$