Matemática Discreta

Unidade 53: Sequências (4)

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Corolário 54

Corolário

Seja A um conjunto finito e seja $n \in \mathbb{N}$. O número de sequências de tamanho no máximo n sobre A é

$$\frac{|A|^{n+1} - 1}{|A| - 1}.$$

Corolário 54

Corolário

Seja A um conjunto finito e seja $n \in \mathbb{N}$. O número de sequências de tamanho no máximo n sobre A é

$$\frac{|A|^{n+1} - 1}{|A| - 1}.$$

Demonstração.

Seja A um conjunto finito e seja $n \in \mathbb{N}$. Vamos provar que o número de sequências de tamanho no máximo n sobre A é

$$\frac{|A|^{n+1} - 1}{|A| - 1}.$$

Corolário 54

Demonstração.

Como o conjunto das sequências de tamanho no máximo n sobre A é

$$\bigcup_{i=0}^{n} A^i,$$

Corolário 54

Demonstração.

Como o conjunto das sequências de tamanho no máximo n sobre A é

$$\bigcup_{i=0}^{n} A^i,$$

então o número de sequências de tamanho no máximo n sobre A é

$$\left|\bigcup_{i=0}^{n} A^i\right|.$$

Corolário 54

Demonstração.

Como o conjunto das sequências de tamanho no máximo n sobre A é

$$\bigcup_{i=0}^{n} A^i,$$

então o número de sequências de tamanho no máximo n sobre A é

$$\left|\bigcup_{i=0}^{n} A^i\right|.$$

Como os conjuntos $A^i : 0 \leq i \leq n$ são dois a dois disjuntos entre si, temos

$$\left|\bigcup_{i=0}^{n} A^i\right| \overset{\text{C. } 44}{=} \sum_{i=0}^{n} |A^i| \overset{\text{C. } 53}{=}$$

Corolário 54

Demonstração.

Como o conjunto das sequências de tamanho no máximo n sobre A é

$$\bigcup_{i=0}^{n} A^i,$$

então o número de sequências de tamanho no máximo n sobre A é

$$\left|\bigcup_{i=0}^{n} A^i\right|.$$

Como os conjuntos $A^i : 0 \leq i \leq n$ são dois a dois disjuntos entre si, temos

$$\left|\bigcup_{i=0}^{n} A^i\right| \overset{\text{C. 44}}{=} \sum_{i=0}^{n} |A^i| \overset{\text{C. 53}}{=} \sum_{i=0}^{n} |A|^i \overset{\text{Ex. 46}}{=}$$

Corolário 54

Demonstração.

Como o conjunto das sequências de tamanho no máximo n sobre A é

$$\bigcup_{i=0}^{n} A^i,$$

então o número de sequências de tamanho no máximo n sobre A é

$$\left| \bigcup_{i=0}^{n} A^i \right|.$$

Como os conjuntos $A^i : 0 \leq i \leq n$ são dois a dois disjuntos entre si, temos

$$\left| \bigcup_{i=0}^{n} A^i \right| \overset{\text{C. 44}}{=} \sum_{i=0}^{n} |A^i| \overset{\text{C. 53}}{=} \sum_{i=0}^{n} |A|^i \overset{\text{Ex. 46}}{=} \frac{|A|^{n+1} - 1}{|A| - 1}.$$

Exercício 152

Qual o maior valor de n tal que é possível gravar em um dvd (4 700 372 992 bytes) todos os possíveis arquivos de tamanho até n?

Exercício 152

Qual o maior valor de n tal que é possível gravar em um dvd (4 700 372 992 bytes) todos os possíveis arquivos de tamanho até n?

Fazendo

$$\begin{aligned} d &:= 4\,700\,372\,992 = 2^{17} \cdot 7 \cdot 47 \cdot 109, \\ s(n) &:= \text{soma dos tamanhos de todos os arquivos de tamanho até } n, \end{aligned}$$

temos

$$s(n) =$$

Exercício 152

Qual o maior valor de n tal que é possível gravar em um dvd ($4\,700\,372\,992$ bytes) todos os possíveis arquivos de tamanho até n?

Fazendo

$$\begin{aligned} d &:= 4\,700\,372\,992 = 2^{17} \cdot 7 \cdot 47 \cdot 109, \\ s(n) &:= \text{soma dos tamanhos de todos os arquivos de tamanho até } n, \end{aligned}$$

temos

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} i|A(i)|,$$

onde

$$A(n) := \text{conjunto dos arquivos de tamanho } n.$$

Exercício 152

Como

$$A(n) = B^n,$$

onde B é o conjunto dos bytes, então

Exercício 152

Como

$$A(n) = B^n,$$

onde B é o conjunto dos bytes, então

$$|A(n)| = |B^n| \overset{\text{C. 53}}{=}$$

Exercício 152

Como

$$A(n) = B^n,$$

onde B é o conjunto dos bytes, então

$$|A(n)| = |B^n| \overset{\text{C. 53}}{=} |B|^n \overset{\text{Ex. 150}}{=}$$

Exercício 152

Como

$$A(n) = B^n,$$

onde B é o conjunto dos bytes, então

$$|A(n)| = |B^n| \overset{\text{C. 53}}{=} |B|^n \overset{\text{Ex. 150}}{=} 256^n,$$

e portanto,

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} i|A(i)| =$$

Exercício 152

Como

$$A(n) = B^n,$$

onde B é o conjunto dos bytes, então

$$|A(n)| = |B^n| \overset{\text{C. 53}}{=} |B|^n \overset{\text{Ex. 150}}{=} 256^n,$$

e portanto,

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} i|A(i)| = \sum_{i=0}^{n} i256^i \overset{\text{Ex. 131f}}{=}$$

Exercício 152

Como

$$A(n) = B^n,$$

onde B é o conjunto dos bytes, então

$$|A(n)| = |B^n| \overset{\text{C. 53}}{=} |B|^n \overset{\text{Ex. 150}}{=} 256^n,$$

e portanto,

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} i|A(i)| = \sum_{i=0}^{n} i256^i \overset{\text{Ex. 131f}}{=} \frac{256}{255}n256^n - \frac{256}{65025}256^n + \frac{256}{65025}.$$

Exercício 152

Como

$$A(n) = B^n,$$

onde B é o conjunto dos bytes, então

$$|A(n)| = |B^n| \overset{\text{C. 53}}{=} |B|^n \overset{\text{Ex. 150}}{=} 256^n,$$

e portanto,

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} i|A(i)| = \sum_{i=0}^{n} i256^i \overset{\text{Ex. 131f}}{=} \frac{256}{255}n256^n - \frac{256}{65025}256^n + \frac{256}{65025}.$$

Queremos determinar o maior valor de k tal que

$$s(k) \leq d,$$

ou seja,

Exercício 152

Como

$$A(n) = B^n,$$

onde B é o conjunto dos bytes, então

$$|A(n)| = |B^n| \overset{\text{C. 53}}{=} |B|^n \overset{\text{Ex. 150}}{=} 256^n,$$

e portanto,

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} i|A(i)| = \sum_{i=0}^{n} i256^i \overset{\text{Ex. 131f}}{=} \frac{256}{255} n256^n - \frac{256}{65025} 256^n + \frac{256}{65025}.$$

Queremos determinar o maior valor de k tal que

$$s(k) \leq d,$$

ou seja,

$$n = \max\{k \in \mathbb{N} \mid s(k) \leq d\}.$$

Exercício 152

Como

$$s(k) \leq d$$

se e somente se

$$\frac{256}{255} k 256^k - \frac{256}{255^2} 256^k + \frac{256}{255^2} \leq d,$$

ou seja

Exercício 152

Como

$$s(k) \leq d$$

se e somente se

$$\frac{256}{255}k256^k - \frac{256}{255^2}256^k + \frac{256}{255^2} \leq d,$$

ou seja

$$255 \cdot 256^{k+1}k - 256^{k+1} \leq 255^2 d - 256$$

ou seja

Exercício 152

Como

$$s(k) \leq d$$

se e somente se

$$\frac{256}{255}k256^k - \frac{256}{255^2}256^k + \frac{256}{255^2} \leq d,$$

ou seja

$$255 \cdot 256^{k+1}k - 256^{k+1} \leq 255^2 d - 256$$

ou seja

$$255 \cdot 256^{k+1}k\left(1 - \frac{1}{255k}\right) \leq 255^2 d - 256.$$

Exercício 152

$$255 \cdot 256^{k+1} k \left(1 - \frac{1}{255k}\right) \leq 255^2 d - 256.$$

Como $k \geq 1$,

Exercício 152

$$255 \cdot 256^{k+1} k \left(1 - \frac{1}{255k}\right) \leq 255^2 d - 256.$$

Como $k \geq 1$, então basta

$$255 \cdot 256^{k+1} k \leq 255^2 d - 256,$$

Exercício 152

$$255 \cdot 256^{k+1} k \left(1 - \frac{1}{255k}\right) \leq 255^2 d - 256.$$

Como $k \geq 1$, então basta

$$255 \cdot 256^{k+1} k \leq 255^2 d - 256,$$

isto é

$$256^{k+1} k \leq 255d - \frac{256}{255} = 255d\left(1 - \frac{256}{255^2 d}\right)$$

Exercício 152

$$255 \cdot 256^{k+1} k \left(1 - \frac{1}{255k}\right) \leq 255^2 d - 256.$$

Como $k \geq 1$, então basta

$$255 \cdot 256^{k+1} k \leq 255^2 d - 256,$$

isto é

$$256^{k+1} k \leq 255d - \frac{256}{255} = 255d \left(1 - \frac{256}{255^2 d}\right)$$

ou seja

$$(k+1) \lg 256 + \lg k \leq \lg 255d + \lg \left(1 - \frac{256}{255^2 d}\right).$$

Exercício 152

$$255 \cdot 256^{k+1} k \left(1 - \frac{1}{255k}\right) \leq 255^2 d - 256.$$

Como $k \geq 1$, então basta

$$255 \cdot 256^{k+1} k \leq 255^2 d - 256,$$

isto é

$$256^{k+1} k \leq 255d - \frac{256}{255} = 255d \left(1 - \frac{256}{255^2 d}\right)$$

ou seja

$$(k+1) \lg 256 + \lg k \leq \lg 255d + \lg \left(1 - \frac{256}{255^2 d}\right).$$

Então basta

$$8k + 8 + \lg k \leq \lg 255d - 1$$

Exercício 152

$$255 \cdot 256^{k+1} k \left(1 - \frac{1}{255k}\right) \leq 255^2 d - 256.$$

Como $k \geq 1$, então basta

$$255 \cdot 256^{k+1} k \leq 255^2 d - 256,$$

isto é

$$256^{k+1} k \leq 255d - \frac{256}{255} = 255d \left(1 - \frac{256}{255^2 d}\right)$$

ou seja

$$(k+1) \lg 256 + \lg k \leq \lg 255d + \lg \left(1 - \frac{256}{255^2 d}\right).$$

Então basta

$$8k + 8 + \lg k \leq \lg 255d - 1$$

ou seja

$$8k + \lg k \leq \lg 255d - 9 = \lg 255 + \lg d - 9.$$

Exercício 152

Como $\lg 255 > 7$ e $\lg d > 32$, então basta

$$8k + \lg k \leq 7 + 32 - 9 = 30.$$

Exercício 152

Como $\lg 255 > 7$ e $\lg d > 32$, então basta

$$8k + \lg k \leq 7 + 32 - 9 = 30.$$

ou seja

$$k \leq \frac{30 - \lg k}{8} = \frac{30}{8} - \frac{\lg k}{8} < 4,$$

Exercício 152

Como $\lg 255 > 7$ e $\lg d > 32$, então basta

$$8k + \lg k \leq 7 + 32 - 9 = 30.$$

ou seja

$$k \leq \frac{30 - \lg k}{8} = \frac{30}{8} - \frac{\lg k}{8} < 4,$$

e portanto,

$$n = \max\left\{k \in \mathbb{N} \mid \frac{256}{255}k256^k - \frac{256}{255^2}256^k + \frac{256}{255^2} \leq d,\right\} \geq 3.$$

Exercício 152

Efetivamente,

$$\begin{aligned} s(3) = 50\,462\,976 &\quad < \quad d, \\ s(4) = 17\,230\,332\,160 &\quad > \quad d. \end{aligned}$$

Exercício 152

Efetivamente,

$$\begin{aligned} s(3) = 50\,462\,976 &\quad < \quad d, \\ s(4) = 17\,230\,332\,160 &\quad > \quad d. \end{aligned}$$

e, portanto,

$$n = 3,$$

ou seja, cabem num dvd todos os possíveis arquivos de tamanho até 3.

Exercício 152

Efetivamente,

$$\begin{aligned} s(3) = 50\,462\,976 &\quad < \quad d, \\ s(4) = 17\,230\,332\,160 &\quad > \quad d. \end{aligned}$$

e, portanto,

$$n = 3,$$

ou seja, cabem num dvd todos os possíveis arquivos de tamanho até 3.

Observe que, $4 \times 256^4 = 17\,179\,869\,184 > 4\,700\,372\,992$, e

$$\left\lceil \frac{4 \times 256^4}{4\,700\,372\,992} \right\rceil = 4,$$

e, portanto,

Exercício 152

Efetivamente,

$$\begin{aligned} s(3) = 50\,462\,976 &\quad < \quad d, \\ s(4) = 17\,230\,332\,160 &\quad > \quad d. \end{aligned}$$

e, portanto,

$$n = 3,$$

ou seja, cabem num dvd todos os possíveis arquivos de tamanho até 3.

Observe que, $4 \times 256^4 = 17\,179\,869\,184 > 4\,700\,372\,992$, e

$$\left\lceil \frac{4 \times 256^4}{4\,700\,372\,992} \right\rceil = 4,$$

e, portanto, num dvd não cabem todos os arquivos de tamanho 4.

Exercício 152

Efetivamente,

$$\begin{aligned} s(3) = 50\,462\,976 &\quad < \quad d, \\ s(4) = 17\,230\,332\,160 &\quad > \quad d. \end{aligned}$$

e, portanto,

$$n = 3,$$

ou seja, cabem num dvd todos os possíveis arquivos de tamanho até 3.

Observe que, $4 \times 256^4 = 17\,179\,869\,184 > 4\,700\,372\,992$, e

$$\left\lceil \frac{4 \times 256^4}{4\,700\,372\,992} \right\rceil = 4,$$

e, portanto, num dvd não cabem todos os arquivos de tamanho 4.
Isto é, precisa-se de 4 dvd's para armazenarmos todos os arquivos de tamanho 4.