Matemática Discreta

Unidade 60: Sequências sem Repetição

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Sequências sem Repetição

Sequências sem Repetição

A

Sequências sem Repetição

A: conjunto finito

Sequências sem Repetição

A: conjunto finito

quantas sequências de tamanho k sobre A sem elementos repetidos?

Sequências sem Repetição

A: conjunto finito

quantas sequências de tamanho k sobre A sem elementos repetidos?

A_k

Sequências sem Repetição

A: conjunto finito

quantas sequências de tamanho k sobre A sem elementos repetidos?

$A_k :=$ sequências sobre A de tamanho k sem elementos repetidos

Sequências sem Repetição

A: conjunto finito

quantas sequências de tamanho k sobre A sem elementos repetidos?

$A_k :=$ sequências sobre A de tamanho k sem elementos repetidos

também conhecidas por

Sequências sem Repetição

A: conjunto finito

quantas sequências de tamanho k sobre A sem elementos repetidos?

$A_k :=$ sequências sobre A de tamanho k sem elementos repetidos

também conhecidas por

- arranjos sem repetição de k elementos de A

Sequências sem Repetição

A: conjunto finito

quantas sequências de tamanho k sobre A sem elementos repetidos?

$A_k :=$ sequências sobre A de tamanho k sem elementos repetidos

também conhecidas por

- arranjos sem repetição de k elementos de A
- amostras ordenadas sem reposição de tamanho k do conjunto A

Princípio Multiplicativo

Princípio Multiplicativo

$n = |A|$

Princípio Multiplicativo

$n = |A|$

$(a_1, a_2, \dots, a_k) \in A_k$

Princípio Multiplicativo

$n = |A|$

$(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in A_k$

a_1

Princípio Multiplicativo

$n = |A|$

$(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in A_k$

a_1: n escolhas

Princípio Multiplicativo

$n = |A|$

$(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in A_k$

a_1: n escolhas

a_2

Princípio Multiplicativo

$n = |A|$

$(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in A_k$

a_1: n escolhas

a_2: $n - 1$ escolhas

Princípio Multiplicativo

$n = |A|$

$(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in A_k$

a_1: n escolhas

a_2: $n - 1$ escolhas

$\ldots$

Princípio Multiplicativo

$n = |A|$

$(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in A_k$

a_1: n escolhas

a_2: $n - 1$ escolhas

$\ldots$

a_k

Princípio Multiplicativo

$n = |A|$

$(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in A_k$

a_1: n escolhas

a_2: $n - 1$ escolhas

$\ldots$

a_k: $n - (k - 1)$ escolhas

Princípio Multiplicativo

$n = |A|$

$(a_1, a_2, \dots, a_k) \in A_k$

a_1: n escolhas

a_2: $n - 1$ escolhas

$\dots$

a_k: $n - (k - 1)$ escolhas

$|A_k|$

Princípio Multiplicativo

$n = |A|$

$(a_1, a_2, \dots, a_k) \in A_k$

a_1: n escolhas

a_2: $n - 1$ escolhas

$\dots$

a_k: $n - (k - 1)$ escolhas

$|A_k| = n(n-1)\dots(n-k+1)$

Princípio Multiplicativo

$n = |A|$

$(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in A_k$

a_1: n escolhas

a_2: $n - 1$ escolhas

$\ldots$

a_k: $n - (k - 1)$ escolhas

$$|A_k| = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1}(n-i)$$

Princípio Multiplicativo

$n = |A|$

$(a_1, a_2, \dots, a_k) \in A_k$

a_1: n escolhas

a_2: $n-1$ escolhas

$\dots$

a_k: $n-(k-1)$ escolhas

$$|A_k| = n(n-1)\dots(n-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1}(n-i) = \prod_{i=n-k+1}^{n} i$$

Princípio Multiplicativo

$$n = |A|$$

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in A_k$$

a_1: n escolhas

a_2: $n - 1$ escolhas

$\ldots$

a_k: $n - (k - 1)$ escolhas

$$|A_k| = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1}(n-i) = \prod_{i=n-k+1}^{n} i = n_k$$

Princípio Multiplicativo

$$n = |A|$$

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in A_k$$

a_1: n escolhas

a_2: $n-1$ escolhas

$\ldots$

a_k: $n-(k-1)$ escolhas

$$|A_k| = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1}(n-i) = \prod_{i=n-k+1}^{n} i = n_k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Argumento Indutivo

Argumento Indutivo

a

Argumento Indutivo

$a \in A$

Argumento Indutivo

$a \in A$

$A_{k,a} :=$ sequências de A_k que começam com a

Argumento Indutivo

$a \in A$

$A_{k,a} :=$ sequências de A_k que começam com a

$F\colon [n]_k \to [n]$

Argumento Indutivo

$a \in A$

$A_{k,a} :=$ sequências de A_k que começam com a

$F\colon [n]_k \to [n]$: $F(a_1, \ldots, a_k)$

Argumento Indutivo

$a \in A$

$A_{k,a} :=$ sequências de A_k que começam com a

$F\colon [n]_k \to [n]$: $\qquad F(a_1, \ldots, a_k) = a_1$

Argumento Indutivo

$a \in A$

$A_{k,a} :=$ sequências de A_k que começam com a

$F\colon [n]_k \to [n]$: $\qquad F(a_1, \ldots, a_k) = a_1$

$F^{-1}(i)$

Argumento Indutivo

$a \in A$

$A_{k,a} :=$ sequências de A_k que começam com a

$F\colon [n]_k \to [n]$: $\qquad F(a_1, \ldots, a_k) = a_1$

$F^{-1}(i) = [n]_{k,i}$

Argumento Indutivo

Argumento Indutivo

$|[n]_k|$

Argumento Indutivo

$$\left|[n]_k\right| \overset{\text{C. 46}}{=} \sum_{i \in F([n]_k)} \left|F^{-1}(i)\right|$$

Argumento Indutivo

$$|[n]_k| \overset{\text{C. 46}}{=} \sum_{i \in F([n]_k)} \left|F^{-1}(i)\right| = \sum_{i \in [n]} |[n]_{k,i}|$$

Argumento Indutivo

$$|[n]_k| \overset{\text{C. 46}}{=} \sum_{i \in F([n]_k)} \left|F^{-1}(i)\right| = \sum_{i \in [n]} |[n]_{k,i}|$$

$G_i \colon [n]_{k,i} \to ([n] - \{i\})_{k-1}$

Argumento Indutivo

$$|[n]_k| \overset{\text{C. 46}}{=} \sum_{i \in F([n]_k)} \left|F^{-1}(i)\right| = \sum_{i \in [n]} |[n]_{k,i}|$$

$G_i \colon [n]_{k,i} \to ([n] - \{i\})_{k-1}$: $\qquad G_i(a_1 = i, a_2, \ldots, a_k)$

Argumento Indutivo

$$|[n]_k| \overset{\text{C. 46}}{=} \sum_{i \in F([n]_k)} \left|F^{-1}(i)\right| = \sum_{i \in [n]} |[n]_{k,i}|$$

$G_i \colon [n]_{k,i} \to ([n] - \{i\})_{k-1}$: $\qquad G_i(a_1 = i, a_2, \ldots, a_k) = (a_2, \ldots, a_k)$

Argumento Indutivo

$$|[n]_k| \overset{\text{C. 46}}{=} \sum_{i \in F([n]_k)} \left|F^{-1}(i)\right| = \sum_{i \in [n]} |[n]_{k,i}|$$

$G_i \colon [n]_{k,i} \to ([n] - \{i\})_{k-1}$: $\qquad G_i(a_1 = i, a_2, \ldots, a_k) = (a_2, \ldots, a_k)$

G é bijetora

Argumento Indutivo

$$|[n]_k| \overset{\text{C. 46}}{=} \sum_{i \in F([n]_k)} \left|F^{-1}(i)\right| = \sum_{i \in [n]} |[n]_{k,i}|$$

$G_i \colon [n]_{k,i} \to ([n] - \{i\})_{k-1}$: $\qquad G_i(a_1 = i, a_2, \dots, a_k) = (a_2, \dots, a_k)$

G é bijetora

$$|[n]_{k,i}| = |[n-1]_{k-1}|$$

Argumento Indutivo

$$|[n]_k| \overset{\text{C. 46}}{=} \sum_{i \in F([n]_k)} \left|F^{-1}(i)\right| = \sum_{i \in [n]} |[n]_{k,i}| = \sum_{i \in [n]} |[n-1]_{k-1}|$$

$G_i \colon [n]_{k,i} \to ([n] - \{i\})_{k-1}$: $\qquad G_i(a_1 = i, a_2, \dots, a_k) = (a_2, \dots, a_k)$

G é bijetora

$|[n]_{k,i}| = |[n-1]_{k-1}|$

Argumento Indutivo

$$|[n]_k| \overset{\text{C. 46}}{=} \sum_{i \in F([n]_k)} \left|F^{-1}(i)\right| = \sum_{i \in [n]} |[n]_{k,i}| = \sum_{i \in [n]} |[n-1]_{k-1}| \overset{\text{T 4}}{=} n\,|[n-1]_{k-1}|$$

$G_i \colon [n]_{k,i} \to ([n] - \{i\})_{k-1}$: $\qquad G_i(a_1 = i, a_2, \ldots, a_k) = (a_2, \ldots, a_k)$

G é bijetora

$|[n]_{k,i}| = |[n-1]_{k-1}|$

Recorrência

Recorrência

$$|[n]_k| = n\,|[n-1]_{k-1}|$$

Recorrência

$$|[n]_k| = n\,|[n-1]_{k-1}|$$

$$f(n,k) := |[n]_k|$$

Recorrência

$$|[n]_k| = n\,|[n-1]_{k-1}|$$

$$f(n,k) := |[n]_k|$$

$$f(n,k) = nf(n-1,k-1)$$

Recorrência

$$|[n]_k| = n\,|[n-1]_{k-1}|$$

$$f(n,k) := |[n]_k|$$

$$f(n,k) = nf(n-1,k-1) \qquad\qquad f(n,0)$$

Recorrência

$$|[n]_k| = n\,|[n-1]_{k-1}|$$

$$f(n,k) := |[n]_k|$$

$$f(n,k) = nf(n-1,k-1) \qquad\qquad f(n,0) = |[n]_0|$$

Recorrência

$$|[n]_k| = n\,|[n-1]_{k-1}|$$

$$f(n,k) := |[n]_k|$$

$$f(n,k) = nf(n-1,k-1) \qquad f(n,0) = |[n]_0| = 1$$

Recorrência

$$|[n]_k| = n\,|[n-1]_{k-1}|$$

$$f(n,k) := |[n]_k|$$

$$f(n,k) = nf(n-1,k-1) \qquad f(n,0) = |[n]_0| = 1 \qquad [n]_0 = \{()\}$$

Recorrência

$$|[n]_k| = n\,|[n-1]_{k-1}|$$

$$f(n,k) := |[n]_k|$$

$$f(n,k) = nf(n-1,k-1) \qquad f(n,0) = |[n]_0| = 1 \qquad [n]_0 = \{()\}$$

$$f(n,k) \overset{\text{T. 29}}{=} f(n-u,k-u)\prod_{i=0}^{u-1}(n-i)$$

Recorrência

$$|[n]_k| = n\,|[n-1]_{k-1}|$$

$$f(n,k) := |[n]_k|$$

$$f(n,k) = nf(n-1,k-1) \qquad f(n,0) = |[n]_0| = 1 \qquad [n]_0 = \{()\}$$

$$f(n,k) \overset{\text{T. 29}}{=} f(n-u,k-u)\prod_{i=0}^{u-1}(n-i) = f(n-u,k-u)n_u$$

Recorrência

$$|[n]_k| = n\,|[n-1]_{k-1}|$$

$$f(n,k) := |[n]_k|$$

$$f(n,k) = nf(n-1,k-1) \qquad f(n,0) = |[n]_0| = 1 \qquad [n]_0 = \{()\}$$

$$f(n,k) \overset{\text{T. 29}}{=} f(n-u,k-u)\prod_{i=0}^{u-1}(n-i) = f(n-u,k-u)n_u$$

u

Recorrência

$$|[n]_k| = n\,|[n-1]_{k-1}|$$

$$f(n,k) := |[n]_k|$$

$$f(n,k) = nf(n-1,k-1) \qquad f(n,0) = |[n]_0| = 1 \qquad [n]_0 = \{()\}$$

$$f(n,k) \stackrel{\text{T. 29}}{=} f(n-u,k-u)\prod_{i=0}^{u-1}(n-i) = f(n-u,k-u)n_u$$

$$u = \min\{i \in \mathbb{N} \mid k-i \leq 0\}$$

Recorrência

$$|[n]_k| = n\,|[n-1]_{k-1}|$$

$$f(n,k) := |[n]_k|$$

$$f(n,k) = nf(n-1,k-1) \qquad f(n,0) = |[n]_0| = 1 \qquad [n]_0 = \{()\}$$

$$f(n,k) \overset{\text{T. 29}}{=} f(n-u,k-u)\prod_{i=0}^{u-1}(n-i) = f(n-u,k-u)n_u$$

$$u = \min\{i \in \mathbb{N} \mid k-i \leq 0\} = k$$

Recorrência

$$|[n]_k| = n\,|[n-1]_{k-1}|$$

$$f(n,k) := |[n]_k|$$

$$f(n,k) = nf(n-1,k-1) \qquad f(n,0) = |[n]_0| = 1 \qquad [n]_0 = \{()\}$$

$$f(n,k) \overset{\text{T. 29}}{=} f(n-u,k-u)\prod_{i=0}^{u-1}(n-i) = f(n-u,k-u)n_u$$

$$u = \min\{i \in \mathbb{N} \mid k-i \leq 0\} = k$$

$$f(n,k)$$

Recorrência

$$|[n]_k| = n\,|[n-1]_{k-1}|$$

$$f(n,k) := |[n]_k|$$

$$f(n,k) = nf(n-1,k-1) \qquad f(n,0) = |[n]_0| = 1 \qquad [n]_0 = \{()\}$$

$$f(n,k) \overset{\text{T. 29}}{=} f(n-u,k-u)\prod_{i=0}^{u-1}(n-i) = f(n-u,k-u)n_u$$

$$u = \min\{i \in \mathbb{N} \mid k-i \leq 0\} = k$$

$$f(n,k) = f(n-k,k-k)n_k$$

Recorrência

$$|[n]_k| = n\,|[n-1]_{k-1}|$$

$$f(n,k) := |[n]_k|$$

$$f(n,k) = nf(n-1,k-1) \qquad f(n,0) = |[n]_0| = 1 \qquad [n]_0 = \{()\}$$

$$f(n,k) \overset{\text{T. 29}}{=} f(n-u,k-u)\prod_{i=0}^{u-1}(n-i) = f(n-u,k-u)n_u$$

$$u = \min\{i \in \mathbb{N} \mid k - i \leq 0\} = k$$

$$f(n,k) = f(n-k,k-k)n_k = f(n-k,0)n_k$$

Recorrência

$$|[n]_k| = n\,|[n-1]_{k-1}|$$

$$f(n,k) := |[n]_k|$$

$$f(n,k) = nf(n-1,k-1) \qquad f(n,0) = |[n]_0| = 1 \qquad [n]_0 = \{()\}$$

$$f(n,k) \overset{\text{T. 29}}{=} f(n-u,k-u)\prod_{i=0}^{u-1}(n-i) = f(n-u,k-u)n_u$$

$$u = \min\{i \in \mathbb{N} \mid k-i \leq 0\} = k$$

$$f(n,k) = f(n-k,k-k)n_k = f(n-k,0)n_k = n_k$$

Teorema 60

Teorema 60

o número de sequências sem elementos repetidos de tamanho k sobre um conjunto de n elementos é n_k

Corolário 61

Corolário 61

o número de sequências sem elementos repetidos de tamanho k sobre um conjunto finito A é $|A|_k$

Corolário 61

o número de sequências sem elementos repetidos de tamanho k sobre um conjunto finito A é $|A|_k$

$$|A_k| = |A|_k$$

Sequências, Funções, Bolas e Urnas

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{sequências}} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & \boxed{\text{funções}} \arrow[dl, leftrightarrow] \\
& \boxed{\text{bolas e urnas}} &
\end{tikzcd}
$$

$\boxed{\text{sequências sem repetição de tamanho } k \text{ sobre } B}$

Sequências, Funções, Bolas e Urnas

$\boxed{\text{sequências sem repetição de tamanho } k \text{ sobre } B}$

$\boxed{\text{funções } A \to B}$

Sequências, Funções, Bolas e Urnas

$$\boxed{\text{sequências sem repetição de tamanho } k \text{ sobre } B} \longleftrightarrow \boxed{\text{funções injetoras } A \to B}$$

Sequências, Funções, Bolas e Urnas

$\boxed{\text{sequências sem repetição de tamanho } k \text{ sobre } B} \longleftrightarrow \boxed{\text{funções injetoras } A \to B}$

$\boxed{\text{distribuições de } k \text{ bolas distintas por } n \text{ urnas distintas}}$

Sequências, Funções, Bolas e Urnas

sequências sem repetição de tamanho k sobre B $\longleftrightarrow$ funções injetoras $A \to B$

distribuições de k bolas distintas por n urnas distintas com no máximo uma bola por urna

Corolário 62

Corolário 62

A, B

Corolário 62

A, B: conjuntos finitos

Corolário 62

A, B: conjuntos finitos

o número de funções injetoras $A \to B$ é $|B|_{|A|}$

Corolário 62

A, B: conjuntos finitos

o número de funções injetoras $A \to B$ é $|B|_{|A|}$

$$|B_A| = |B|_{|A|}$$

Corolário 63

Corolário 63

existem n_k maneiras de distribuir k bolas distintas por n urnas distintas de maneira que nenhuma urna receba mais que uma bola