Matemática Discreta

Unidade 61: O Problema dos Aniversários

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Problema dos Aniversários

Problema dos Aniversários

n pessoas

Problema dos Aniversários

n pessoas

datas de aniversário equiprováveis

Problema dos Aniversários

n pessoas

datas de aniversário equiprováveis

quantas pessoas para que $\mathbb{P}\,(\text{aniversários coincidentes}) \geq 50\%$?

Problema dos Aniversários

Problema dos Aniversários

maneiras de se distribuirem aniversários de n pessoas

Problema dos Aniversários

maneiras de se distribuirem aniversários de n pessoas: 365^n

Problema dos Aniversários

maneiras de se distribuirem aniversários de n pessoas: 365^n (Ex. 168)

Problema dos Aniversários

maneiras de se distribuirem aniversários de n pessoas: 365^n (Ex. 168)
$= \#$ funções $[n] \to 365$

Problema dos Aniversários

maneiras de se distribuirem aniversários de n pessoas: 365^n (Ex. 168)
$= \#$ funções $[n] \to 365$

maneiras de se distribuirem aniversários de n pessoas sem coincidências

Problema dos Aniversários

maneiras de se distribuirem aniversários de n pessoas: 365^n (Ex. 168)
$= \#$ funções $[n] \to 365$

maneiras de se distribuirem aniversários de n pessoas sem coincidências
$= \#$ funções injetoras $[n] \to 365$

Problema dos Aniversários

maneiras de se distribuirem aniversários de n pessoas: 365^n (Ex. 168)
$= \#$ funções $[n] \to 365$

maneiras de se distribuirem aniversários de n pessoas sem coincidências
$= \#$ funções injetoras $[n] \to 365 = 365_n$

Problema dos Aniversários

maneiras de se distribuirem aniversários de n pessoas: 365^n (Ex. 168)
$= \#$ funções $[n] \to 365$

maneiras de se distribuirem aniversários de n pessoas sem coincidências
$= \#$ funções injetoras $[n] \to 365 = 365_n$ (C. 62)

Problema dos Aniversários

maneiras de se distribuirem aniversários de n pessoas: 365^n (Ex. 168)
$= \#$ funções $[n] \to 365$

maneiras de se distribuirem aniversários de n pessoas sem coincidências
$= \#$ funções injetoras $[n] \to 365 = 365_n$ (C. 62)

probabilidade de não haver coincidência de aniversários

Problema dos Aniversários

maneiras de se distribuirem aniversários de n pessoas: 365^n (Ex. 168)
$= \#$ funções $[n] \to 365$

maneiras de se distribuirem aniversários de n pessoas sem coincidências
$= \#$ funções injetoras $[n] \to 365 = 365_n$ (C. 62)

probabilidade de não haver coincidência de aniversários: $p(n)$

Problema dos Aniversários

maneiras de se distribuirem aniversários de n pessoas: 365^n (Ex. 168)
$= \#$ funções $[n] \to 365$

maneiras de se distribuirem aniversários de n pessoas sem coincidências
$= \#$ funções injetoras $[n] \to 365 = 365_n$ (C. 62)

probabilidade de não haver coincidência de aniversários: $p(n) = \dfrac{365_n}{365^n}$

Problema dos Aniversários

maneiras de se distribuirem aniversários de n pessoas: 365^n (Ex. 168)
$= \#$ funções $[n] \to 365$

maneiras de se distribuirem aniversários de n pessoas sem coincidências
$= \#$ funções injetoras $[n] \to 365 = 365_n$ (C. 62)

probabilidade de não haver coincidência de aniversários: $p(n) = \dfrac{365_n}{365^n}$

queremos o menor n tal que $p(n) \leq 50\%$

$p(n)$

$p(n)$

$$p(n) = \frac{365_n}{365^n}$$

$p(n)$

$$
\begin{aligned}
p(n) &= \frac{365_n}{365^n} \\
&= \frac{365 \times (365 - 1) \times \ldots \times (365 - (n - 1))}{365 \times 365 \times \ldots \times 365}
\end{aligned}
$$

$p(n)$

$$
\begin{aligned}
p(n) &= \frac{365_n}{365^n} \\
&= \frac{365 \times (365-1) \times \ldots \times (365-(n-1))}{365 \times 365 \times \ldots \times 365} \\
&= \frac{365}{365} \times \frac{365-1}{365} \times \ldots \times \frac{365-(n-1)}{365}
\end{aligned}
$$

$p(n)$

$$\begin{aligned}
p(n) &= \frac{365_n}{365^n} \\
&= \frac{365 \times (365-1) \times \ldots \times (365-(n-1))}{365 \times 365 \times \ldots \times 365} \\
&= \frac{365}{365} \times \frac{365-1}{365} \times \ldots \times \frac{365-(n-1)}{365} \\
&= \prod_{i=0}^{n-1} \frac{365-i}{365}
\end{aligned}$$

$p(n)$

$$\begin{aligned}
p(n) &= \frac{365_n}{365^n} \\
&= \frac{365 \times (365-1) \times \ldots \times (365-(n-1))}{365 \times 365 \times \ldots \times 365} \\
&= \frac{365}{365} \times \frac{365-1}{365} \times \ldots \times \frac{365-(n-1)}{365} \\
&= \prod_{i=0}^{n-1} \frac{365-i}{365} \\
&= \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{365}\right)
\end{aligned}$$

Estimativa de $p(n)$

Estimativa de $p(n)$

$1 - x < e^{-x}$, para todo $x \in \mathbb{R}$

Estimativa de $p(n)$

$1 - x < e^{-x},$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (Série de Taylor para e^x)

Estimativa de $p(n)$

$1 - x < e^{-x}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$ (Série de Taylor para e^x)

$p(n)$

Estimativa de $p(n)$

$1 - x < e^{-x}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$ (Série de Taylor para e^x)

$$p(n) = \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{365}\right)$$

Estimativa de $p(n)$

$1 - x < e^{-x}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$ (Série de Taylor para e^x)

$$p(n) = \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{365}\right) < \prod_{i=0}^{n-1} e^{-i/365}$$

Estimativa de $p(n)$

$1 - x < e^{-x}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$ (Série de Taylor para e^x)

$$p(n) = \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{365}\right) < \prod_{i=0}^{n-1} e^{-i/365} = e^{-\sum_{i=0}^{n-1} i/365}$$

Estimativa de $p(n)$

$1 - x < e^{-x}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$ (Série de Taylor para e^x)

$$p(n) = \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{365}\right) < \prod_{i=0}^{n-1} e^{-i/365} = e^{-\sum_{i=0}^{n-1} i/365} \ldots < e^{-\frac{(n-1)^2}{730}}$$

$p(n) \leq 50\%$

$p(n) \leq 50\%$

$$p(n) \leq \frac{1}{2}$$

$p(n) \leq 50\%$

$$p(n) \leq \frac{1}{2} \Leftarrow e^{-\frac{(n-1)^2}{730}} \leq \frac{1}{2}$$

$p(n) \leq 50\%$

$$p(n) \leq \frac{1}{2} \Leftarrow e^{-\frac{(n-1)^2}{730}} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow n \geq \sqrt{730 \ln 2} + 1$$

$p(n) \leq 50\%$

$$p(n) \leq \frac{1}{2} \Leftarrow e^{-\frac{(n-1)^2}{730}} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow n \geq \sqrt{730 \ln 2} + 1 > 22 + 1$$

$p(n) \leq 50\%$

$$p(n) \leq \frac{1}{2} \Leftarrow e^{-\frac{(n-1)^2}{730}} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow n \geq \sqrt{730 \ln 2} + 1 > 22 + 1 = 23$$

$p(n) \leq 50\%$

$$p(n) \leq \frac{1}{2} \Leftarrow e^{-\frac{(n-1)^2}{730}} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow n \geq \sqrt{730 \ln 2} + 1 > 22 + 1 = 23$$

Em valores exatos:

$p(n) \leq 50\%$

$$p(n) \leq \frac{1}{2} \Leftarrow e^{-\frac{(n-1)^2}{730}} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow n \geq \sqrt{730 \ln 2} + 1 > 22 + 1 = 23$$

Em valores exatos: $49\% < p(23) < 50\%$

$p(n) \leq 50\%$

$$p(n) \leq \frac{1}{2} \Leftarrow e^{-\frac{(n-1)^2}{730}} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow n \geq \sqrt{730 \ln 2} + 1 > 22 + 1 = 23$$

Em valores exatos: $49\% < p(23) < 50\% < p(22)$

$p(n) \leq 50\%$

$$p(n) \leq \frac{1}{2} \Leftarrow e^{-\frac{(n-1)^2}{730}} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow n \geq \sqrt{730 \ln 2} + 1 > 22 + 1 = 23$$

Em valores exatos: $49\% < p(23) < 50\% < p(22) < 52\%$

$p(n) \leq 50\%$

$$p(n) \leq \frac{1}{2} \Leftarrow e^{-\frac{(n-1)^2}{730}} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow n \geq \sqrt{730 \ln 2} + 1 > 22 + 1 = 23$$

Em valores exatos: $49\% < p(23) < 50\% < p(22) < 52\%$

chance de haver coincidência de aniversários num grupo de ≥ 23 pessoas é $> 50\%$