

Matemática Discreta

Unidade 64: Subconjuntos com Número Fixo de Elementos (1)

Renato Carmo
David Menotti

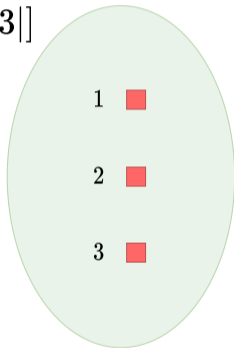
Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Subconjuntos com Número Fixo de Elementos

Quantos subconjuntos de k elementos tem um conjunto finito de n elementos?

$[[3]]$



$$k = 0 \quad \emptyset$$

$$k = 1 \quad \{1\}, \{2\}, \{3\}$$

$$k = 2 \quad \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$$

$$k = 3 \quad \{1, 2, 3\}$$

$$\wp(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\} = 2^A$$

Subconjuntos com Número Fixo de Elementos

Notação

Se A é um conjunto finito e $k \in \mathbb{N}$, o conjunto dos subconjuntos de k elementos de A será denotado $\binom{A}{k}$, isto é,

$$\binom{A}{k} := \{S \subseteq A \mid |S| = k\},$$

A pergunta então é qual o valor de

$$\left| \binom{A}{k} \right|.$$

Teorema

Se A é um conjunto finito e $k \in \mathbb{N}$, então

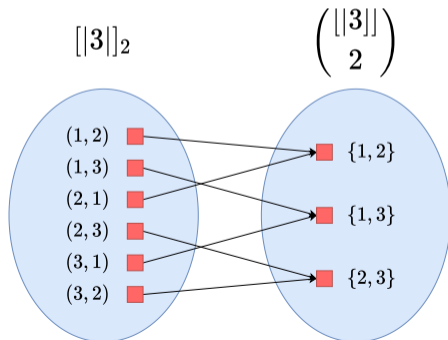
$$\left| \binom{A}{k} \right| = \binom{|A|}{k}.$$

Teorema 68

Demonstração.

Seja A um conjunto finito e seja $k \in \mathbb{N}$ e seja $F: A_k \rightarrow \binom{A}{k}$ a função dada por

$$F((a_1, \dots, a_k)) = \{a_1, \dots, a_k\}.$$

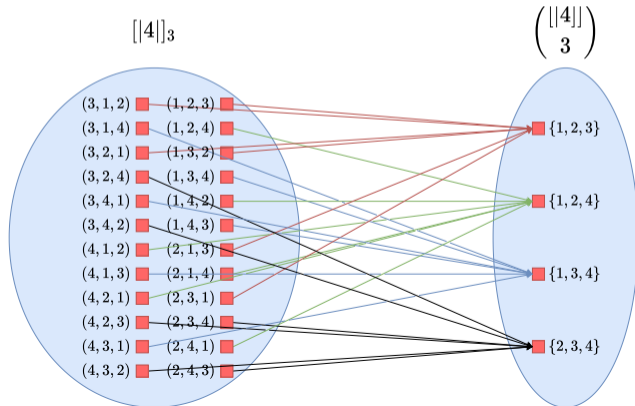


Teorema 68

Demonstração.

Seja A um conjunto finito e seja $k \in \mathbb{N}$ e seja $F: A_k \rightarrow \binom{A}{k}$ a função dada por

$$F((a_1, \dots, a_k)) = \{a_1, \dots, a_k\}.$$



Teorema 68

Demonstração.

Para cada $S \in \binom{A}{k}$ temos

$$F^{-1}(S) = S!,$$

Teorema 68

Demonstração.

Para cada $S \in \binom{A}{k}$ temos

$$F^{-1}(S) = S!,$$

e portanto

$$|F^{-1}(S)| = |S|! = k!,$$

Teorema 68

Demonstração.

e consequentemente (Corolário 46)

$$|A_k| = \sum_{S \in \mathcal{F}(A_k)} |F^{-1}(S)| =$$

Teorema 68

Demonstração.

e consequentemente (Corolário 46)

$$|A_k| = \sum_{S \in F(A_k)} |F^{-1}(S)| = \sum_{S \in \binom{A}{k}} |S!| \stackrel{\text{C. 65}}{=} \dots$$

Teorema 68

Demonstração.

e conseqüentemente (Corolário 46)

$$|A_k| = \sum_{S \in F(A_k)} |F^{-1}(S)| = \sum_{S \in \binom{A}{k}} |S|! \stackrel{\text{C. 65}}{=} \sum_{S \in \binom{A}{k}} |S|! =$$

Teorema 68

Demonstração.

e conseqüentemente (Corolário 46)

$$|A_k| = \sum_{S \in F(A_k)} |F^{-1}(S)| = \sum_{S \in \binom{A}{k}} |S|! \stackrel{\text{C. 65}}{=} \sum_{S \in \binom{A}{k}} |S|! = \sum_{S \in \binom{A}{k}} k! \stackrel{\text{T. 4}}{=} k! \binom{|A|}{k}$$

Teorema 68

Demonstração.

e conseqüentemente (Corolário 46)

$$|A_k| = \sum_{S \in F(A_k)} |F^{-1}(S)| = \sum_{S \in \binom{A}{k}} |S|! \stackrel{\text{C. 65}}{=} \sum_{S \in \binom{A}{k}} |S|! = \sum_{S \in \binom{A}{k}} k! \stackrel{\text{T. 4}}{=} \left| \binom{A}{k} \right| k!$$

e portanto,

$$\left| \binom{A}{k} \right| =$$

Teorema 68

Demonstração.

e conseqüentemente (Corolário 46)

$$|A_k| = \sum_{S \in F(A_k)} |F^{-1}(S)| = \sum_{S \in \binom{A}{k}} |S|! \stackrel{\text{C. 65}}{=} \sum_{S \in \binom{A}{k}} |S|! = \sum_{S \in \binom{A}{k}} k! \stackrel{\text{T. 4}}{=} \left| \binom{A}{k} \right| k!$$

e portanto,

$$\left| \binom{A}{k} \right| = \frac{|A_k|}{k!} \stackrel{\text{C. 62}}{=}$$

Teorema 68

Demonstração.

e conseqüentemente (Corolário 46)

$$|A_k| = \sum_{S \in F(A_k)} |F^{-1}(S)| = \sum_{S \in \binom{A}{k}} |S|! \stackrel{\text{C. 65}}{=} \sum_{S \in \binom{A}{k}} |S|! = \sum_{S \in \binom{A}{k}} k! \stackrel{\text{T. 4}}{=} \left| \binom{A}{k} \right| k!$$

e portanto,

$$\left| \binom{A}{k} \right| = \frac{|A_k|}{k!} \stackrel{\text{C. 62}}{=} \frac{|A|_k}{k!} =$$

Teorema 68

Demonstração.

e conseqüentemente (Corolário 46)

$$|A_k| = \sum_{S \in F(A_k)} |F^{-1}(S)| = \sum_{S \in \binom{A}{k}} |S|! \stackrel{\text{C. 65}}{=} \sum_{S \in \binom{A}{k}} |S|! = \sum_{S \in \binom{A}{k}} k! \stackrel{\text{T. 4}}{=} \left| \binom{A}{k} \right| k!$$

e portanto,

$$\left| \binom{A}{k} \right| = \frac{|A_k|}{k!} \stackrel{\text{C. 62}}{=} \frac{|A|_k}{k!} = \frac{|A|!}{(|A|-k)!} =$$

Teorema 68

Demonstração.

e conseqüentemente (Corolário 46)

$$|A_k| = \sum_{S \in F(A_k)} |F^{-1}(S)| = \sum_{S \in \binom{A}{k}} |S|! \stackrel{\text{C. 65}}{=} \sum_{S \in \binom{A}{k}} |S|! = \sum_{S \in \binom{A}{k}} k! \stackrel{\text{T. 4}}{=} \left| \binom{A}{k} \right| k!$$

e portanto,

$$\left| \binom{A}{k} \right| = \frac{|A_k|}{k!} \stackrel{\text{C. 62}}{=} \frac{|A|_k}{k!} = \frac{|A|!}{(|A|-k)!} = \frac{|A|!}{k!(|A|-k)!} =$$

Teorema 68

Demonstração.

e conseqüentemente (Corolário 46)

$$|A_k| = \sum_{S \in F(A_k)} |F^{-1}(S)| = \sum_{S \in \binom{A}{k}} |S|! \stackrel{\text{C. 65}}{=} \sum_{S \in \binom{A}{k}} |S|! = \sum_{S \in \binom{A}{k}} k! \stackrel{\text{T. 4}}{=} \binom{A}{k} k!$$

e portanto,

$$\left| \binom{A}{k} \right| = \frac{|A_k|}{k!} \stackrel{\text{C. 62}}{=} \frac{|A|_k}{k!} = \frac{|A|!}{(|A|-k)!} = \frac{|A|!}{k!(|A|-k)!} = \binom{|A|}{k}.$$

